

DS n°2 - Convection

I/ 1) On remarque que $e_v \ll a$. On peut alors faire l'hypothèse que le problème est invariant par translation selon les axes y et z . Ainsi $\vec{j}_q = \vec{j}_q(x, t)$.

2) On considère une tranche de paroi de verre infinitésimale comprise entre x et $x+dx$. Soit dU son énergie interne:

$$dU(t) = \rho c_p S dx T(x, t) ; dU(t+dt) = \rho c_p S dx T(x, t+dt)$$

Soient δQ_e et δQ_s les énergies entrantes et sortantes de notre système entre t et $t+dt$:

$$\delta Q_e = j_q(x) S dt ; \delta Q_s = j_q(x+dx) S dt$$

Un bilan d'énergie interne (1^{er} principe de la thermodynamique) donne:

$$dU(t+dt) - dU(t) = \delta Q_e - \delta Q_s$$

$$\text{Soit: } \rho c_p S dx (T(x, t+dt) - T(x, t)) = S dt (j_q(x, t) - j_q(x+dx, t))$$

$$\hookrightarrow \rho c_p dx dt \frac{\partial T}{\partial t} = -dt dx \frac{\partial j_q}{\partial x} \Rightarrow \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_q}{\partial x}$$

$$3) \text{ La loi de Fourier est: } \vec{j}_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$$

4) En utilisant les réponses aux questions précédentes:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Soit $\frac{\partial T}{\partial t} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ l'équation de la chaleur
avec D le coefficient de diffusion

$D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ s'exprime en m^2/s

5) Par analyse dimensionnelle: $\tau = \frac{e_v^2}{D}$

A.N.: $\tau = 1,6 \times 10^2 s$

6) ~~On utilise le 1^{er} principe de la therm~~

L'eau de l'aquarium est une phase condensée ainsi:

$$\Delta U = \rho_e c_{pe} V (T_e - T_{e,i}) \quad \text{et } V = a^3$$

$$\rightarrow \Delta U = \rho_e c_{pe} a^3 (T_e - T_{e,i})$$

A.N.: $\Delta U = 4,2 \times 10^7 J$

7) On a: $\Delta U = P_{\text{chauf}} \times t_{\text{chauf}} \Rightarrow t_{\text{chauf}} = \frac{\Delta U}{P_{\text{chauf}}}$

A.N.: $t_{\text{chauf}} \approx 2,3 h$

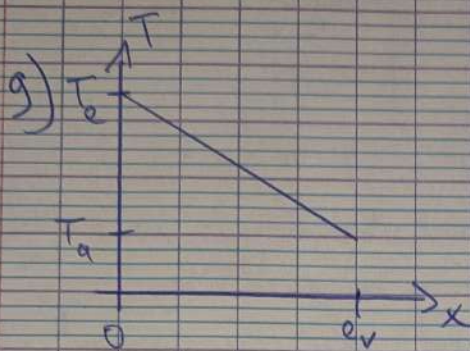
8) En régime stationnaire: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc l'équation de la chaleur devient:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

On utilise les conditions aux limites: $T(0) = T_e \Rightarrow B = T_e$

$$T(e_v) = T_a \Rightarrow A e_v + T_e = T_a \Rightarrow A = \frac{T_a - T_e}{e_v}$$

8) (suite) Finalement $T(x) = \frac{T_a - T_e}{e_v} x + T_e$



10) On a $\phi = \lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \lambda \frac{T_e - T_a}{e_v} S$

$\phi = \lambda S \frac{T_e - T_a}{e_v}$

11) La loi d'ohm est $U = R \times I$. Ici l'analogie de U est $T_e - T_a$; l'analogie de I est ϕ .

Ainsi $R_{\text{cond},1} = \frac{T_e - T_a}{\phi}$ d'où $R_{\text{cond},1} = \frac{e_v}{\lambda S}$

12) La couche de tartre et la couche de béton sont traversées par le même flux thermique elles sont donc en série. En généralisant l'expression obtenue à la question précédente:

$R_{\text{cond},2} = \frac{e_t}{\lambda_t S} + \frac{e_b}{\lambda_b S}$

13) On a $\phi_{\text{cc}} = h_{\text{cc}} S (T(x_2) - T_a)$. Ici dans notre analogie électrique, l'analogie de la tension est $T(x_2) - T_a$ et l'analogie de I est ϕ_{cc} . Ainsi:

$R_{\text{cc}} = \frac{1}{h_{\text{cc}} S}$

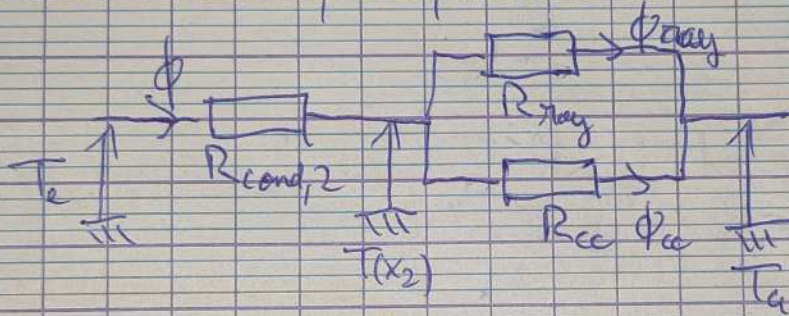
A.N.: $R_{\text{cc}} = 7,1 \times 10^{-2} \text{ K/W}$

14) De même que précédemment: $R_{\text{ray}} = \frac{1}{h_{\text{ray}} S}$

d'où $R_{\text{ray}} = \frac{1}{\epsilon \sigma T_a^4 S}$

15) Les résistances R_{cc} et R_{ray} sont soumises à la même différence de température et sont donc en parallèle.
Le flux traversant la paroi est évacué par rayonnement et conducto-convection.

L'exéma électrique équivalent est:



16) La résistance équivalente est:

$$R_{th2} = R_{cond,2} + \frac{R_{ray} \times R_{cc}}{R_{ray} + R_{cc}}$$

i.e. $R_{th2} = \frac{e_t}{\lambda_1 S} + \frac{e_b}{\lambda_2 S} + \frac{1}{S^2 h_{ray} h_{cc}} \left(\frac{1}{h_{ray} S} + \frac{1}{h_{cc} S} \right)$

d'où $R_{th2} = \frac{e_t}{\lambda_1 S} + \frac{e_b}{\lambda_2 S} + \frac{1}{h_{cc} S + h_{ray} S}$

A.N.: $R_{th2} = 6,0 \times 10^{-2} \text{ K/W}$

17) On utilise le schéma électrique de la question 15.

Un pont diviseur de tension nous donne :

$$T(x_2) - T_e = (T_a - T_e) \frac{R_{cond,2}}{\frac{R_{ray} \times R_{ec}}{R_{ray} + R_{ec}} + R_{cond,2}}$$

$$\text{d'où } T(x_2) = (T_a - T_e) \frac{R_{cond,2}}{\frac{R_{ray} \times R_{ec}}{R_{ray} + R_{ec}} + R_{cond,2}} + T_e$$

$$\text{A.N. : } T(x_2) = 12,2^\circ\text{C}$$

18) De même qu'en question 16) :

$$R_{th,1} = R_{cond,1} + \frac{R_{ec} \times R_{ray}}{R_{ec} + R_{ray}}$$

$$\text{A.N. : } R_{th,1} = 9,8 \times 10^{-3} \text{ K/W}$$

19) Toutes les parois sont soumises à la même différence de température et sont donc en parallèle.

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{R_{th,tot}} = \frac{5}{R_{th,2}} + \frac{1}{R_{th,1}}$$

$$\text{d'où } R_{th,tot} = \frac{R_{th,2} \times R_{th,1}}{5 \times R_{th,1} + R_{th,2}}$$

$$\text{A.N. : } R_{th,tot} = 6,6 \times 10^{-3} \text{ K/W}$$

20) Le flux thermique s'échappant de l'aquarium est $\phi = \frac{T_e - T_a}{R_{th,tot}}$

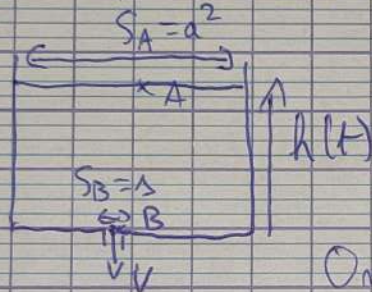
Pour que la température interne T_e soit constante on doit compenser exactement ces pertes ainsi:

$$P = \frac{T_e - T_a}{R_{th, tot}}$$

A.N.: $P = 2,42 \text{ W}$

21) On remarque que $R_{th,1} < R_{th,2}$ c'est donc la paroi 1 que l'on cible en priorité. On pourrait installer un double vitrage.

22) La situation est la suivante:



On suppose notre écoulement parfait et incompressible.

On le suppose également stationnaire malgré le fait que la hauteur h va varier.

L'écoulement étant stationnaire et incompressible il y a conservation du débit volumique:

Soit A un point de la surface libre et B un point en sortie:
 $V_A S_A = V_B \Delta$ or $S_A = a^2 = 1 \text{ m}^2$

d'où $V_A = V_B \frac{\Delta}{a^2} = \frac{V_B}{100}$. On néglige v_A devant v_B dans un premier temps.

La relation de Bernoulli sur une ligne de courant reliant A à B donne:

$$P_0 + \cancel{\rho \frac{V_A^2}{2}} + \rho g h = P_0 + \rho \frac{V_B^2}{2} + 0$$

D'où $V_B = \sqrt{2gh}$ on retrouve la formule de Torricelli.

22) (suite) On va maintenant s'intéresser à la variation de h . On a vu que :

$$v_A = v_B \frac{\Delta}{a^2} \quad \text{ou} \quad v_A = \frac{dh}{dt}$$

Avec le résultat précédent on a donc :

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{2gh} \frac{\Delta}{a^2} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{2g} \frac{\Delta}{a^2} dt$$

On intègre entre $t=0$ et t l'expression précédente sachant qu'en $t=0$ on a $h=h_0$

$$-2(\sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0}) = \sqrt{2g} \frac{\Delta}{a^2} t$$

$$\text{d'où } \sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \sqrt{2g} \frac{\Delta}{2a^2} t \quad \text{et } h_0 = a = 1\text{m}$$

Finalement, l'aquarium est vide lorsque $h(t_v) = 0$ d'où :

$$\sqrt{a} - \sqrt{2g} \frac{\Delta}{2a^2} t_v = 0 \Rightarrow t_v = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \frac{2a^2}{\Delta} = \sqrt{\frac{2a}{g}} \frac{a^2}{\Delta}$$

$$\text{A.N. : } t_v = 45 \text{ s}$$

23) On a $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$

24) C'est la charge : $P + e \frac{v^2}{2} + e g z$

25) L'écoulement est stationnaire et incompressible donc le débit volumique se conserve.

Ainsi $v_e S_e = v_s S_s$ or la section est constante

$$\text{ainsi } v_e = v_s$$

26) La relation de Bernoulli généralisée est : (pertes de charge négligées)

$$P_E + e \frac{v_E^2}{2} + 0 = P_s + e \frac{v_s^2}{2} + e g H - e w_i$$

en utilisant le fait que $v_E = v_S$ on a

$$\rho w_i = P_s - P_e + \rho g h \Rightarrow w_i = \frac{P_s - P_e}{\rho} + g h$$

A.N. : $w_i = 3,4 \times 10^2 \text{ J/kg}$

27) On a $P_{\text{méca}} = \rho D_v w_i$

d'où $P_{\text{méca}} = 3,4 \times 10^3 \text{ W}$

28) Le rendement η est défini par $\eta = \frac{P_{\text{méca}}}{P_{\text{élec}}}$

d'où $P_{\text{élec}} = \frac{P_{\text{méca}}}{\eta}$ A.N. : $P_{\text{élec}} = 4,3 \times 10^3 \text{ W}$

29) On trouve $H_m = 35 \text{ m}$ et $Q = 3,6 \text{ m}^3/\text{h}$

La pompe la mieux adaptée semble être la 6
(5 aussi accepté).

30) On a $\alpha = 90^\circ$ d'où $K = 1,5$

31) On a $\Delta P_c = K \rho \frac{v^2}{2} = \frac{K \rho}{2} \left(\frac{D_v}{\Sigma} \right)^2$

A.N. : $\Delta P_c = 120 P_a$

32) $P_{\text{diss}} = D_v \times \Delta P_c = D_v \frac{K \rho}{2} \left(\frac{D_v}{\Sigma} \right)^2$

$P_{\text{diss}} = 0,12 \text{ W} \ll P_{\text{méca}}$ On peut donc négliger cette
perte de charge singulière.