# DS 2 - Diffusion thermique et Bernoulli généralisée
# 3 heures

11/10/2025

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

## 1 Déperditions thermiques à travers les parois d'un aquarium

On considère un aquarium cubique ayant une longueur d'arête $a = 1\,\text{m}$. Celui-ci possède une face avant nettoyée de tout calcaire notée 1, formée d'une vitre en verre en contact avec l'air extérieur à la température constante $T_a = 12\,°\text{C}$. À cause d'une eau comportant une concentration importante en minéraux au pH considéré, le calcaire et d'autres sels précipitent sur les autres parois. Ainsi les faces 2, 3, 4, 5 et 6 sont recouvertes d'une couche de tartre puis d'une couche de béton pour le maintien de la structure (figure 1).

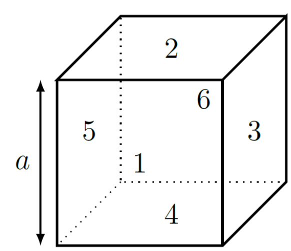


FIGURE 1 – Numérotation des faces de l'aquarium

### 1.1 Équation de la chaleur

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la paroi 1 de l'aquarium. Elle est constituée de verre d'épaisseur $e_v = 1\,\text{cm}$ et sépare l'eau de l'aquarium de l'air extérieur. Le verre est de masse volumique $\rho$, de capacité thermique massique $c_p$ et de conductivité thermique $\lambda$. L'eau issue de la citerne d'approvisionnement est à la température initiale $T_{e,i} = 18\,°\text{C}$. L'aquarium était vide depuis suffisamment de temps pour considérer que celui-ci est à la température de l'air ambiant $T_a = 12\,°\text{C}$. On remplit progressivement l'aquarium avec l'eau de la citerne. On suppose que le flux thermique dans la paroi de verre s'effectue totalement dans la direction $\vec{e}_x$ (figure 2) et on note $T(x,t)$ la température dans le verre.

1. Justifier que le vecteur densité de flux thermique ne dépende que de la coordonnée $x$, $\vec{j}_Q = j_Q(x,t)\vec{e}_x$ .
2. Effectuer un bilan d'énergie interne sur une tranche de la paroi de verre comprise entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$, entre les instants $t$ et $t + \mathrm{d}t$ pour en déduire une équation aux dérivées partielles reliant $T(x,t)$ et $j_Q(x,t)$
3. Rappeler la loi de Fourier à une dimension selon l'axe $x$.
4. Utiliser cette loi ainsi que l'équation aux dérivées partielles trouvée et en déduire la relation

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

Comment appelle-t-on cette équation ? Donner le nom, l'expression et l'unité de $D$.

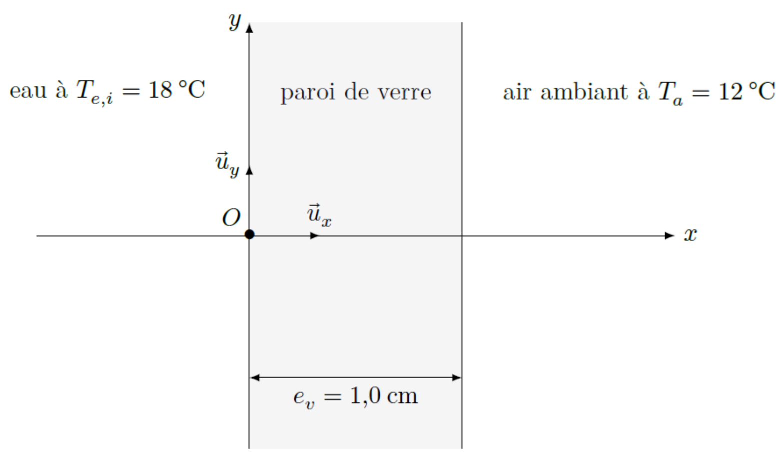


FIGURE 2 – Représentation de la paroi 1.

5. Exprimer $\tau$, l'ordre de grandeur du temps de diffusion de la température à travers la paroi de verre. On donne $\rho = 2{,}5 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $c_p = 720\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ et $\lambda = 1{,}1\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Faire l'application numérique.

## 1.2 Chauffage de l'eau et profil de température

Les poissons de cet aquarium ont besoin d'une température d'eau constante $T_e = 28\,°\mathrm{C}$.

6. Déterminer l'expression de l'énergie interne $\Delta U$ qu'il faut fournir à l'eau de l'aquarium pour la faire passer de la température $T_{e,i} = 18\,°\mathrm{C}$ à la température $T_e$. On note $\rho_e$ la masse volumique de l'eau et $c_{p,e} = 4{,}2 \times 10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ la capacité thermique massique de l'eau. On exprimera $V$ le volume de l'aquarium en fonction des données de l'énoncé.
7. Déterminer l'expression et la valeur numérique du temps $t_{\mathrm{chauf}}$ qu'il faudrait pour faire passer l'eau de l'aquarium de la température $T_{e,i}$ à la température $T_e$ en utilisant un chauffage de puissance $P_{\mathrm{chauf}} = 5\,\mathrm{kW}$. Exprimer le résultat dans une unité qui vous paraît appropriée.

Dans la suite on suppose que l'eau de l'aquarium est à la température $T_e$ et on se place en régime stationnaire.

8. Déterminer le profil de température $T(x)$ dans la paroi de verre 1. On suppose que $T(0) = T_e$ et $T(e_v) = T_a$.
9. Donner une représentation graphique de $T(x)$.

## 1.3 Pertes de puissance thermique

### 1.3.1 Pertes par conduction thermique

10. Exprimer le flux thermique $\Phi$ s'échappant de la paroi 1 en fonction de la différence de température $T_e - T_a$, de la conductivité thermique $\lambda$, de l'épaisseur $e_v$ et de la surface $S$ de la paroi 1.
11. À partir d'une analogie électrique, définir et donner l'expression de la résistance thermique $R_{\mathrm{cond},1}$ de la paroi 1.

On suppose que les autres parois (2, 3, 4, 5 et 6) sont constituées d'une couche de tartre d'épaisseur $e_t = 1\,\mathrm{mm}$, de conductivité thermique $\lambda_t = 0{,}78\,\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-1}}$, puis d'une couche de béton d'épaisseur $e_b = 10\,\mathrm{cm}$ de conductivité thermique $\lambda_b = 1{,}7\,\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-1}}$ (figure 3). On ne tient compte dans cette sous-section que du transfert thermique par conduction.

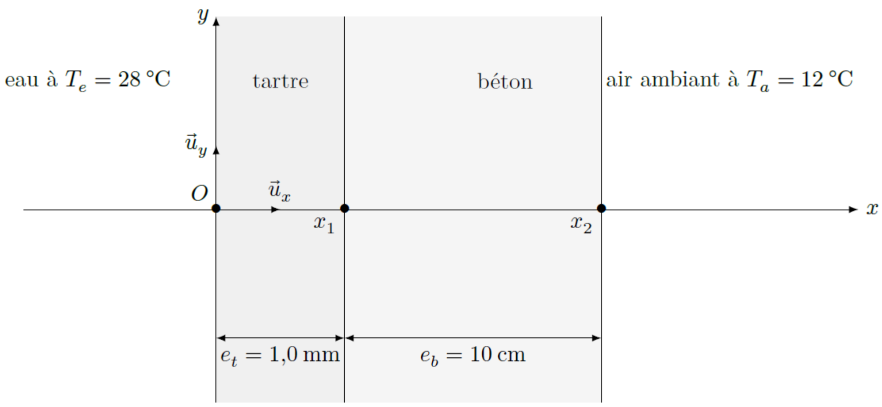


FIGURE 3 – Représentation des parois 2 à 6.

12. Justifier comment sont placées entre elles les deux résistances thermiques correspondant respectivement à la couche de tarte et à la couche de béton. En déduire l'expression de la résistance thermique $R_{\mathrm{cond},2}$ de une des parois 2 à 6.

### 1.3.2 Prise en compte des pertes convectives et par rayonnement

On considère maintenant qu'il y a une discontinuité de température à l'interface entre la paroi de surface $S$ et l'air extérieur. Les transferts convectifs entre la paroi de béton et l'air sont modélisés par la loi de Newton donnant le flux conducto-convectif

$$\Phi_{\mathrm{cc}} = h_{\mathrm{cc}} S (T(x_2) - T_a) \qquad (2)$$

où on donne $h_{\mathrm{cc}} = 14\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$, $T(x_2)$ est la température du béton à l'abscisse $x_2$ et $T_a$ est la température de l'air ambiant. On note $R_{\mathrm{cc}}$ la résistance thermique associée au transport conducto-convectif.

13. Pour une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, exprimer $R_{\mathrm{cc}}$ et faire l'application numérique.

En plus du transfert conducto-convectif, on considère maintenant le transfert thermique par rayonnement au niveau de la paroi. Le flux thermique $\Phi_{\mathrm{ray}}$ émis par la paroi de béton est donné par

$$\Phi_{\mathrm{ray}} = h_{\mathrm{ray}} S (T(x_2) - T_a) \quad \text{avec} \quad h_{\mathrm{ray}} = 4\varepsilon\sigma T_a^4 \qquad (3)$$

où $\sigma = 5{,}7 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ est appelé constante de Stefan-Boltzmann, $\varepsilon = 0{,}90$ est l'émissivité du béton caractérisant l'efficacité du transport radiatif.

On note $R_{\mathrm{ray}}$ la résistance thermique associée au transport radiatif.

14. Pour une seule des cinq parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, exprimer $R_{\mathrm{ray}}$ en fonction de $S$, $\varepsilon$, $\sigma$ et $T_a$.
15. Justifier comment sont disposées entre elles les trois résistances thermiques $R_{\mathrm{cond},2}$, $R_{\mathrm{cc}}$ et $R_{\mathrm{ray}}$. On s'appuiera sur un schéma électrique équivalent.
16. Donner ainsi l'expression de $R_{\mathrm{th},2}$ la résistance thermique totale correspondant à une des parois modélisées par une couche de tartre et une couche de béton, dans un premier temps en fonction de $R_{\mathrm{cond},2}$, $R_{\mathrm{ray}}$ et $R_{\mathrm{cc}}$. Exprimer ensuite $R_{\mathrm{th},2}$ en fonction des données de l'énoncé, puis calculer sa valeur numérique.
17. Cette question est plutôt indépendante des autres. Elle n'est peu ou pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de cette questions.

On suppose toujours que la température du tartre à l'interface eau-tartre est égale à celle de l'eau, $T(0) = T_e$. En s'appuyant notamment sur la continuité du flux thermique, déterminer l'expression puis la valeur de la température $T(x_2)$ sur la paroi de béton.

18. Donner l'expression puis calculer la résistance thermique totale de la paroi de verre 1 $R_{\mathrm{th},1}$ en tenant compte des transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement. On donne, pour l'interface verre-air, $h_{\mathrm{cc,v}} = 30\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$ et l'émissivité du verre $\varepsilon_{\mathrm{v}} = 0{,}90$.

#### 1.3.3 Bilan des pertes thermiques

19. Justifier comment sont disposées entre elles les résistances thermiques correspondant aux différentes parois. En déduire l'expression puis la valeur numérique de la résistance thermique totale de l'aquarium, $R_{\mathrm{th,tot}}$.
20. En déduire l'expression puis la valeur de la puissance $\mathcal{P}$ de chauffage nécessaire au maintien de l'aquarium à la température $T_e$.
21. Quelle solution peut-on envisager afin de limiter ces pertes ?

#### 1.3.4 Vidange de l'aquarium

22. Cette question est indépendante des autres. Elle n'est peu ou pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Il est conseillé d'expliciter clairement la démarche et les choix effectués et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de cette questions.

    On souhaite vidanger (c'est à dire vider de son eau) par gravité l'aquarium cubique étudié, d'arête $a = 1{,}0\,\mathrm{m}$ via une vanne située en dessous de l'aquarium. La section de la canalisation d'évacuation vaut $s = 10\,\mathrm{cm}^2$. Donner l'expression puis la valeur numérique de la durée $t_v$ nécessaire à la vidange totale de l'aquarium.

## 2 Puisage de l'eau pour l'irrigation

Pour l'irrigation des cultures sous serre, l'eau est puisée à une profondeur $H = 30\,\mathrm{m}$ (figure 4). À la surface libre du puits, la pression de l'eau $P_E$ est égale à la pression atmosphérique $P_0 = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. La pression d'utilisation au niveau du sol est de $P_S = 1{,}5 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Le débit volumique de l'écoulement est $D_v = 1{,}0\,\mathrm{L/s}$. La conduite possède une section $\Sigma = 2{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$ constante. On note $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$ l'accélération de la pesanteur et $\rho_e$ la masse volumique de l'eau.

23. Donner la valeur de $\rho_e$, la masse volumique de l'eau dans les unités du système international.
24. Pour un écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible, et en l'absence de pompe, donner le nom et l'expression de la grandeur $\mathcal{C}$, homogène à une pression, qui se conserve le long d'une ligne de courant.

Pour la suite on considérera que l'on a en effet un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, et on néglige dans un premier temps les pertes de charge.

25. Montrer que la vitesse de l'eau aux points $E$ et $S$ est identique, $v_E = v_S$.
26. Utiliser la relation de Bernoulli généralisée pour exprimer le travail massique (ou travail indiqué) $w_i$ que doit fournir la pompe, en fonction de $P_0$, $P_S$, $H$, $\rho_e$ et $g$. Effectuer l'application numérique.
27. En déduire la puissance mécanique de la pompe $\mathcal{P}_{\mathrm{meca}}$ nécessaire.

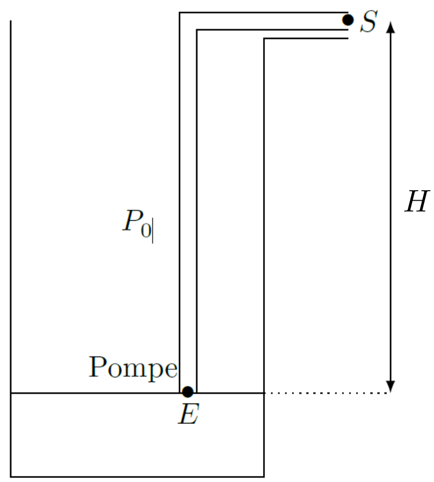


Figure 4

28. Le rendement de la pompe vaut $\eta = 0{,}8$. En déduire la puissance électrique nécessaire à l'alimentation de la pompe. Effectuer l'application numérique.

La figure 5 présente les caractéristiques de différentes pompes. L'abscisse $Q$ du graphe correspond au débit volumique $D_v$ de la pompe et son ordonnée $H_m$ la hauteur manométrique. Ici on a

$$H_m = H + \frac{P_S - P_0}{\rho g} \tag{4}$$

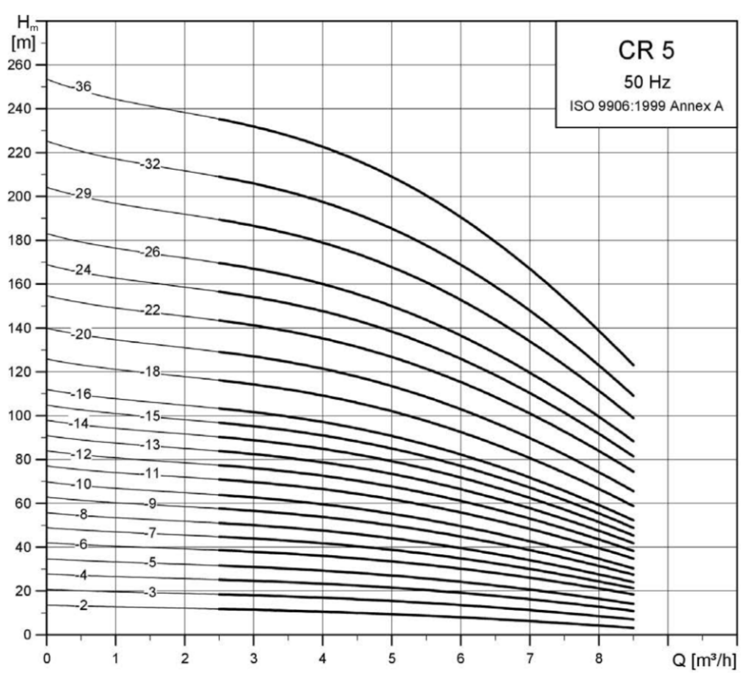


Figure 5 – Caractéristique des différentes pompes

29. Parmi les pompes dont les caractéristiques sont présentées figure 5, quel est le numéro de la pompe la

mieux adaptée à cette utilisation ? Justifier la réponse.

On va maintenant prendre en compte la perte de charge singulière se produisant au niveau du coude de la canalisation. Le coefficient de perte de charge singulière correspondant à un coude d'angle $\alpha$ est

$$K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4(\alpha/2) \tag{5}$$

30. En se référant à la figure 4, donner la valeur numérique de $K$.
31. Donner l'expression de $\Delta P_c$ la perte de charge singulière associée à ce coude, en fonction de $K$, $\rho_e$, $D_v$ et $\Sigma$. Faire l'application numérique.
32. Donner l'expression puis la valeur numérique de la puissance $\mathcal{P}_{\text{diss}}$ dissipée par cette perte de charge singulière. Comparer cette valeur à $\mathcal{P}_{\text{méca}}$ et conclure sur l'importance de prendre en compte la perte de charge singulière.

**FIN DU SUJET**