Mécanique des fluides - Chap. I : Statique des fluides

Valentin Dorel

1 Introduction

La mécaniques des fluides est l'étude du mouvement et des propriétés des **liquides** et des **gaz**. Le principe est d'appliquer les lois de la mécanique (2nde loi de Newton) à un fluide pour l'étudier.

Applications très variées : Plomberie, aéronautique, étude de l'atmosphère, des océans, machines thermiques (moteurs, frigos...).

Dans ce premier chapitre nous étudierons la **statique**, lorsque le fluide est au repos (sans mouvement, $\vec{v} = \vec{0}$ dans tout le fluide).

2 Particule fluide, masse volumique et pression

2.1 Particule fluide

Afin de décrire le fluide nous allons le découper en "petits morceaux", notamment pour pouvoir appliquer la seconde loi de Newton sur chacun de ces morceaux. On va appeler ces morceaux les *particules fluide*. Notons $\mathrm{d}l$ la taille typique de la particule fluide.

On veut décrire le fluide précisément donc la particule fluide doit être très petite par rapport à l'échelle macroscopique i.e. $\mathrm{d}l \ll 1\,\mathrm{cm}$. Par contre cette particule doit contenir un nombre *très important* de molécules du fluide afin de pouvoir décrire son comportement avec les lois de la mécanique et non de la physique de l'infiniment petit (électrostatique, mécanique quantique). Molécule d'eau taille $\sim$ nm.

Ainsi : $\mathrm{nm} \ll \mathrm{d}l \ll \mathrm{cm}$. Cette échelle $\mathrm{d}l$ est appelée échelle *mésoscopique* (figure 1).

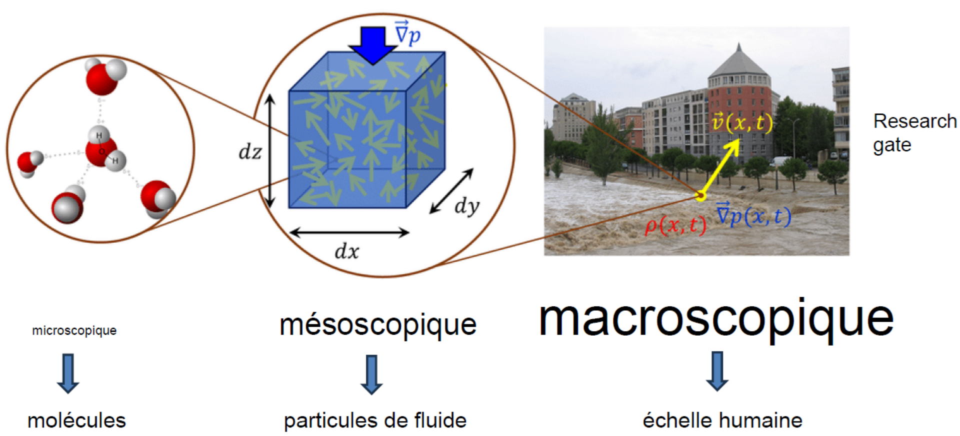

FIGURE 1 – Illustration de la notion de particule fluide.

A.N. : Si on prend une particule de fluide cubique de côté $\mathrm{d}l = 1\,\mu\mathrm{m}$ on a 10^9 molécules d'eau dans notre particule fluide.

La taille de ces particules fluides étant infinitésimale par rapport à l'échelle macroscopique, les grandeurs extensives associées seront notées avec un d : ainsi la masse de la particule de fluide est $\mathrm{d}m$, son volume $\mathrm{d}V$.

2.2 Masse volumique

Nous allons décrire le fluide en utilisant les particules fluide et des grandeurs **locales** ou **intensives** (ne dépend pas de la taille du système). Un premier exemple est la masse volumique, que l'on notera généralement ρ (plus rarement μ). La masse volumique est définie en tout point M d'un fluide comme :

$$\rho(M) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{1}$$

Unité : $\mathrm{kg/m^3}$

Ordres de grandeurs : $\rho_{\text{eau}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$; $\rho_{\text{air}} = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$.

Définition : un fluide *homogène* est un fluide dont la masse volumique ne dépend pas de l'espace.

Dans la suite, on considérera généralement que : les liquides étant très peu compressible, leur masse volumique est constante. Les gaz étant compressibles, leur masse volumique sera variable (liquide = fluide homogène, gaz non).

Expérience : tube à essai huile+eau : deux fluides non miscibles, fluide le plus dense est en bas. $\rho_{\text{huile}} = 0{,}9\,\mathrm{kg/m^3}$. On définit la densité d'un liquide comme $d = \rho/\rho_{\text{eau}}$, ainsi $d_{\text{huile}} = 0.9$. Remarque : on voit tous les jours que le fluide le plus dense est en bas avec l'air et l'eau.

2.3 Pression

On note la pression P elle s'exprime en pascal Pa ou en $\mathrm{N/m^2}$ (force surfacique) ou en $\mathrm{J/m^3}$ (énergie volumique). Grandeur intensive que l'on peut exprimer en tout point du fluide. La pression étant définie en tout point du fluide on parle de *champ* de pression (analogie avec le champ de pesanteur). Exemples :

- Pression atmosphérique $P_0 \simeq 1\,\text{bar} = 1 \times 10^5\,\text{Pa}$ au niveau du sol (varie lorsqu'on monte en altitude montagne/avion)
- Pression lorsque l'on plonge sous l'eau

Interprétation microscopique (animation) : pression dans un fluide est causée par le choc des molécules qui composent ce fluide.

3 Principe fondamental de la statique des fluides

3.1 Démonstration

Le but : appliquer la seconde loi de Newton à une particule fluide au repos.

Statique : pas de mouvement donc pas d'accélération : la somme des forces qui s'appliquent sur la particule de fluide est donc nulle. On place un repère dont la coordonnée verticale z est orientée vers le haut (voir figure 2). Faisons le bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -\mathrm{d}mg\vec{e}_z = -\rho g\mathrm{d}V\vec{e}_z$
- Forces de pression selon z : $\mathrm{d}\vec{F}_5 + \mathrm{d}\vec{F}_6 = P(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z - P(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z$
- Forces de pression selon x : $\mathrm{d}\vec{F}_1 + \mathrm{d}\vec{F}_2 = P(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x - P(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$
- Forces de pression selon y : $\mathrm{d}\vec{F}_3 + \mathrm{d}\vec{F}_4 = P(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y - P(y+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y$

La somme de ces forces est nulle ainsi en projetant sur l'axe z

$$-\rho g\mathrm{d}V + P(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - P(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

$$-\rho g\mathrm{d}V - \mathrm{d}x\mathrm{d}y(P(z+\mathrm{d}z) - P(z)) = 0 \tag{3}$$

$$-\rho g\mathrm{d}V - \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(\frac{P(z+\mathrm{d}z) - P(z)}{\mathrm{d}z}\right) = 0 \tag{4}$$

$$-\rho g\mathrm{d}V - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \tag{5}$$

$$-\rho g\mathrm{d}V - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}V = 0 \tag{6}$$

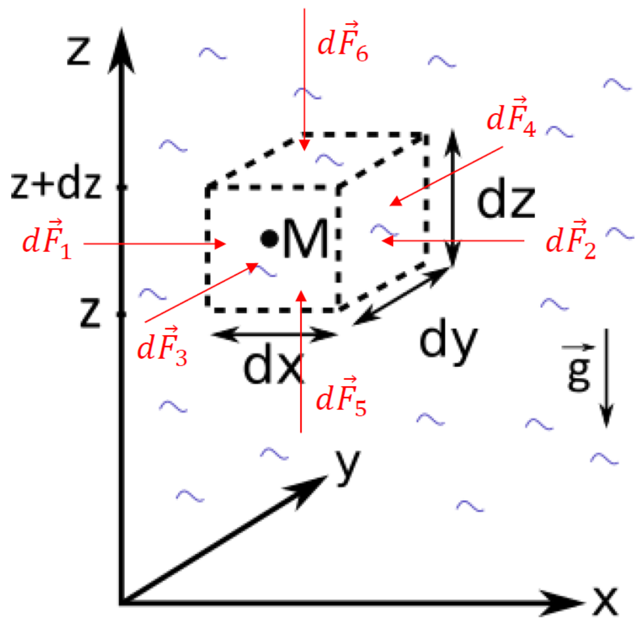

FIGURE 2 – Bilan des forces sur une particule fluide.

Principe fondamental de la statique des fluides (z orienté vers le haut) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \tag{7}$$

Principe fondamental de la statique des fluides (z orienté vers le bas) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g \tag{8}$$

Sur les axes horizontaux on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{9}$$

Premières conséquences :

- Dans un fluide au repos la pression est constante à une hauteur donnée
- **La pression décroît avec la hauteur, augmente avec la profondeur**.

3.2 Loi de l'hydrostatique

On se place dans un liquide qu'on suppose homogène (ρ = cste) dans un champ de pesanteur uniforme. L'axe vertical z est orienté vers le haut. À l'altitude $z = 0$, le liquide est en contact avec l'air et est à la pression P_0 (figure 3).

Le principe fondamental de la statique des fluides donne donc

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \implies P = -\rho g z + C \tag{10}$$

En appliquant la condition aux limites on obtient

Loi de l'hydrostatique : la pression à une profondeur z dans un fluide de densité homogène où la pression à la surface ($z = 0$) est P_0 est

$$P = P_0 - \rho g z \tag{11}$$

avec z orienté vers le haut.

On vérifie bien, lorsqu'on descend dans le fluide, la pression augmente.

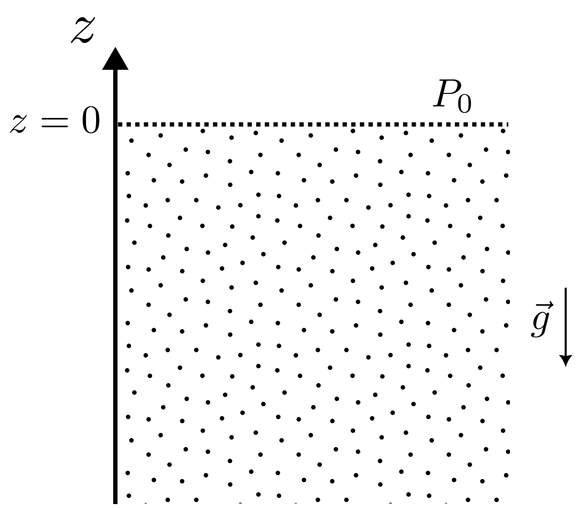

Figure 3 – Situation de l'hydrostatique

Ordre de grandeur : Calculer la pression à une profondeur de 10 m sous l'eau. On donne $P_0 = 1\times10^5$ Pa, $g \sim 10\,\mathrm{m/s^2}$. On trouve que la pression double par rapport à la pression atmosphérique ! On peut retenir que sous l'eau la pression augmente d'un bar tous les 10 m.

Illustration : le tonneau de Pascal.

Exercice : Calculer la pression au fond d'un réservoir de hauteur H, l'axe z orienté vers le haut et $z = 0$ correspondant au fond du réservoir. On trouve $P = P_0 + \rho g(H - z)$.

Entre deux points 1 et 2 de hauteur z_1 et z_2 la différence de pression est $\Delta P = P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1)$. Si on appelle $h = z_2 - z_1$ la différence de hauteur (positive) alors la surpression au point 1 est $\Delta P = \rho g h$.

Exercice : calculer la pression au fond d'un verre dans lequel on a mis une hauteur h_1 de liquide de densité ρ_1 et une hauteur h_2 de liquide de densité ρ_2 (h_1 et h_2 sont des grandeurs positives). On trouve :

$$P = P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \tag{12}$$

Exercice : calculer la résultante des forces de pression sur un barrage.

3.3 Modèle de l'atmosphère isotherme

Observations (figure 4) : la masse volumique (courbe rouge) n'est pas constante mais varie avec l'altitude. On voit également que le profil de pression n'est pas linéaire. On va essayer de l'expliquer.

Dans l'atmosphère la masse volumique n'est pas constante, elle dépend notamment de la pression et de la température d'après la loi des gaz parfaits :

$$P = \frac{\rho R T}{M} \implies \rho = \frac{PM}{RT} \tag{13}$$

On cherche le profil vertical de pression dans l'atmosphère en supposant que la température de cette dernière est constante. Au niveau du sol, $P = P_0$. On applique donc le PFS

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g = -\frac{PM}{RT} g = -\frac{gM}{RT} P \tag{14}$$

Le terme à droite devant la pression est une constante que l'on note $1/H$ la *hauteur d'échelle*, $H = RT/Mg$)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{H} P \implies P = C\exp(-z/H) \tag{15}$$

On applique la condition au niveau du sol pour obtenir

Pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme : en considérant l'air comme un gaz parfait à température T la pression suit la loi

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{gMz}{RT}\right) = P_0 \exp(-z/H) \tag{16}$$

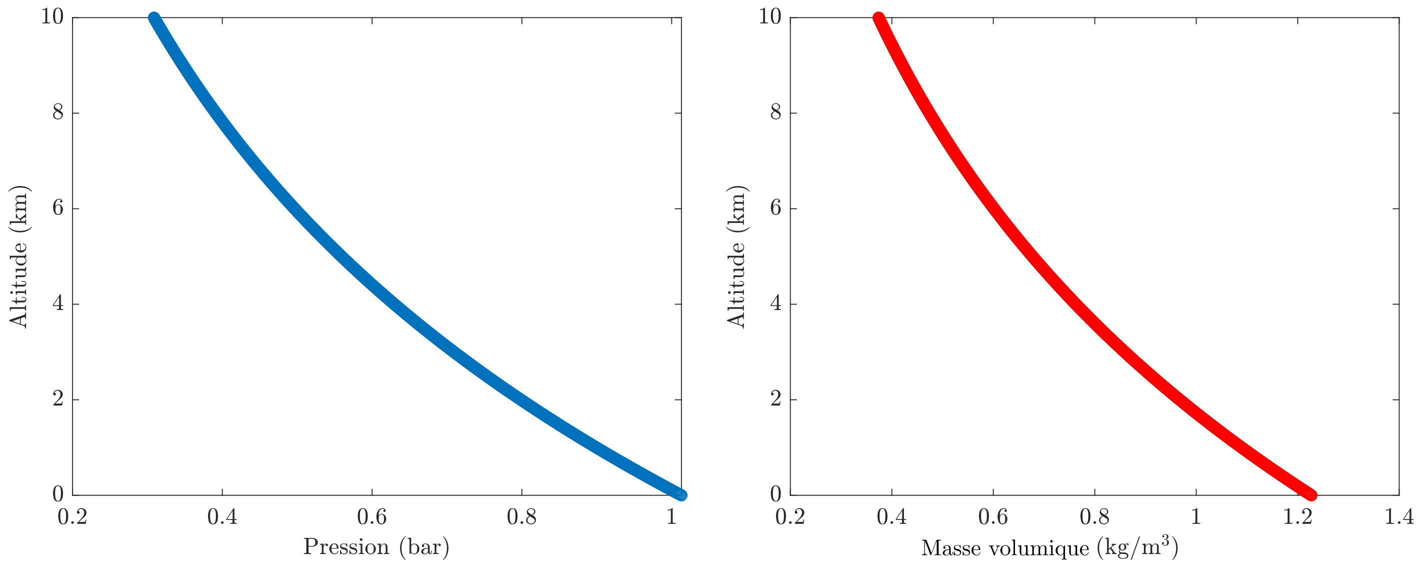

FIGURE 4 – Profils verticaux de pression et de densité dans l'atmosphère.

Et la densité ? Elle suit la même évolution car elle est proportionnelle à la pression dans l'approximation isotherme :

$$\rho = \rho_0 \exp(-z/H) \tag{17}$$

A.N. : pour de l'air à 25 °C on obtient

$$H = \frac{8,314 \times 298}{29 \times 10^{-3} \times 9.81} = 8{,}7\,\mathrm{km} \tag{18}$$

À cette altitude, la pression est réduite d'un facteur e ($\simeq 2.7$). Cette altitude correspond globalement à celle de l'Everest : la pression (et la densité) de l'air y est ainsi presque 3 fois moins importante qu'au niveau de la mer !

3.4 Poussée d'Archimède

Lorsqu'un solide de volume V est immergé dans un fluide de densité ρ il subit la **poussée d'Archimède**, force orientée vers le haut dont la norme est égale **au poids du fluide déplacé**. On a donc $\vec{\Pi} = \rho V g \vec{e}_z$ (z orienté vers le haut).

Exercice : un bateau de masse m de volume V a un volume V_1 immergé dans l'eau (densité ρ_{eau}) et un volume V_2 dans l'air (densité ρ_{air}) ($V = V_1 + V_2$). Quelle approximation peut-on faire ? En la faisant, déduire le volume V_1 du bateau immergé dans l'eau.

On trouve $V_1 = m/\rho_{\mathrm{eau}}$. On vérifie l'unité. Le bateau flottait dans l'océan, maintenant il remonte un fleuve. Le volume immergé augmente ou diminue ?

Déf : la poussée d'Archimède est la résultante des forces de pressions appliquées sur le solide par le fluide.