# Mécanique des fluides - Chap. IV : Vers la relation de Bernoulli généralisée

10 août 2025

Dans le chapitre précédent nous avons vu la relation de Bernoulli, valable pour des écoulements parfaits (sans viscosité). Ici nous allons l'étendre à des cas plus réalistes : présence de viscosité (faisant perdre de l'énergie à l'écoulement) et d'éléments actifs (pompe) faisant gagner de l'énergie à l'écoulement.

## 1 Notion de viscosité

La *viscosité* correspond à la capacité d'un fluide à résister à l'écoulement. Le miel est typiquement beaucoup plus visqueux que l'eau. La présence de viscosité affecte grandement l'écoulement :

- La vitesse est **nulle** au contact des parois solides.
- Les frottements contre les parois **dissipent** de l'énergie et font ainsi perdre de l'énergie à l'écoulement ; ce dernier devient *irréversible*.

**Exemple :** écoulement cisaillé (figure 1). Le fluide est compris entre deux parois parallèles distante de $a$. La paroi

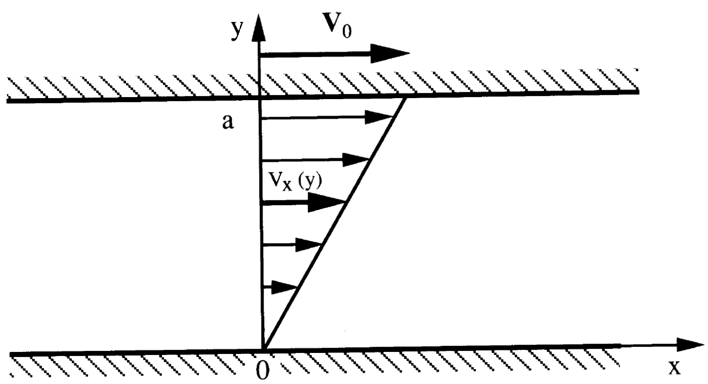


Figure 1 – Écoulement unidirectionnel cisaillé.

supérieure bouge à la vitesse $v_0$ et la paroi inférieure est immobile. Le champ de vitesse est unidirectionnel (selon $\vec{e}_x$) et dépend linéairement de $y$. On a ainsi

$$v_x(y) = v_0 \frac{y}{a}. \tag{1}$$

La paroi inférieure subit une force de la part du fluide, proportionnelle à la *viscosité dynamique* $\eta$, à la surface de contact $S$ et au gradient vertical de vitesse

$$\vec{F} = \eta S \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \vec{e}_x = \eta S \frac{v_0}{a} \vec{e}_x \tag{2}$$

On peut en déduire l'unité de $\eta$ :

$$\eta = \frac{F/S}{v_0/a} \tag{3}$$

Au numérateur on a une pression et au dénominateur une fréquence, ainsi $[\eta] = \mathrm{Pa\,s}$

**Ordre de grandeur :**

| Fluide | Viscosité dynamique $\eta$(Pa s) |
|---|---|
| Air | $1{,}8 \times 10^{-5}$ |
| Eau | $1{,}0 \times 10^{-3}$ |
| SAE 10W (huile moteur) | $1{,}0 \times 10^{-1}$ |
| Miel | 6 |

Table 1 – Viscosité dynamique de différents fluides

# 2 Pertes de charge régulière

Dans le chapitre précédent nous avons vu la relation de Bernoulli, s'appliquant dans le cas de fluide parfaits en écoulement stationnaire que sur une ligne de courant la **charge** se conserve

$$P + \rho v^2/2 + \rho g z = \text{cste} \quad \text{le long d'une ligne de courant.} \tag{4}$$

La viscosité dissipe l'énergie de l'écoulement, ainsi dans un écoulement visqueux la charge décroît à cause du frottement du fluide sur les parois de la conduite : c'est la *perte de charge régulière.*

La charge a l'unité d'une pression, on définit la perte de charge entre un point $A$ en amont et un point $B$ en aval

$$\boxed{\Delta P_c = P_A + \rho v_A^2/2 + \rho g z_A - (P_B + \rho v_B^2/2 + \rho g z_B) > 0} \tag{5}$$

Cette perte de charge peut également s'exprimer en "hauteur de colonne de fluide". En effet on l'a vu dans le premier chapitre, en statique une hauteur de colonne de fluide est proportionnelle à une différence de pression. Typiquement pour de l'eau

$$\Delta P_c = \rho_{\text{eau}} g \Delta h_c \tag{6}$$

avec $\Delta h_c$ toujours positive.

Propriété : la perte de charge **augmente** avec le débit volumique (vidéo). Intuition : c'est comme les frottements fluides, plus on va vite plus les frottements augmentent.

**Exercice :** Du pétrole de masse volumique $\rho = 1600\,\text{kg/m}^3$ s'écoule dans une conduite cylindrique avec un débit volumique de $1{,}0\,\text{m}^3/\text{s}$. Entre l'entrée et la sortie de la conduite on mesure une perte de charge de $\Delta h_c = 20\,\text{m}$ (de colonne de pétrole). Quelle est la perte de charge $\Delta P_c$, exprimée en Pa ?

On trouve $\Delta P_c = 3{,}1 \times 10^5\,\text{Pa} = 3{,}1\,\text{bar}$.

On peut se demander quelle est la *puissance* (énergie par unité de temps) dissipée par cet écoulement.

> Rappel : La puissance s'exprime en W = J/s. La pression s'exprime en Pa = J/m$^3$.
> Ainsi pour passer de pression à puissance il faut multiplier par le débit volumique en m$^3$/s. La puissance dissipée associée à la perte de charge $\Delta P_c$ lorsque le fluide s'écoule à $D_v$ est
>
> $$\mathcal{P}_{\text{diss}} = D_v \Delta P_c \tag{7}$$

**Retour à l'exercice :** on trouve ainsi une puissance dissipée $\mathcal{P}_{\text{diss}} = 3{,}1 \times 10^5\,\text{W}$.

**Déf (HP) :** le nombre de Reynolds. C'est un nombre *sans dimension* qui caractérise l'intensite ou la turbulence d'un écoulement. Il est défini par

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta} \tag{8}$$

avec $U$ et $L$ la vitesse et la longueur typique de l'écoulement. Vérifions qu'il n'a pas d'unité :

$$[Re] = \frac{\text{kg}\,\text{m}^{-3}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\,\text{m}}{\text{Pa}\,\text{s}} = \frac{\text{kg}\,\text{m}^{-1}\,\text{s}^{-1}}{\text{N}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}} = \frac{\text{kg}\,\text{m}^{-1}\,\text{s}^{-1}}{\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{s}} \tag{9}$$

**Exercice :** de l'eau s'écoule dans un tuyau de diamètre 1 cm à une vitesse de 1 cm/s. Estimer le nombre de Reynolds, on trouve $Re = 100$.

On peut considérer qu'un écoulement est turbulent si $Re \gg 1$ et laminaire si $Re \ll 1$. Parfois on dit qu'on est turbulent pour $Re > 2000$ et laminaire sinon.

# 3 Pertes de charge singulière

Les pertes de charge peuvent être aussi dues à un changement brutal de forme de la conduite : coude, élargissement, présence d'une grille... Dans ces cas là, des tables donnent le coefficient $K$ (figure 2) permettant de calculer la perte de charge associée, telle que

$$\Delta P_c = K\frac{\rho v^2}{2} \tag{10}$$

$v$ étant la vitesse en amont du changement.

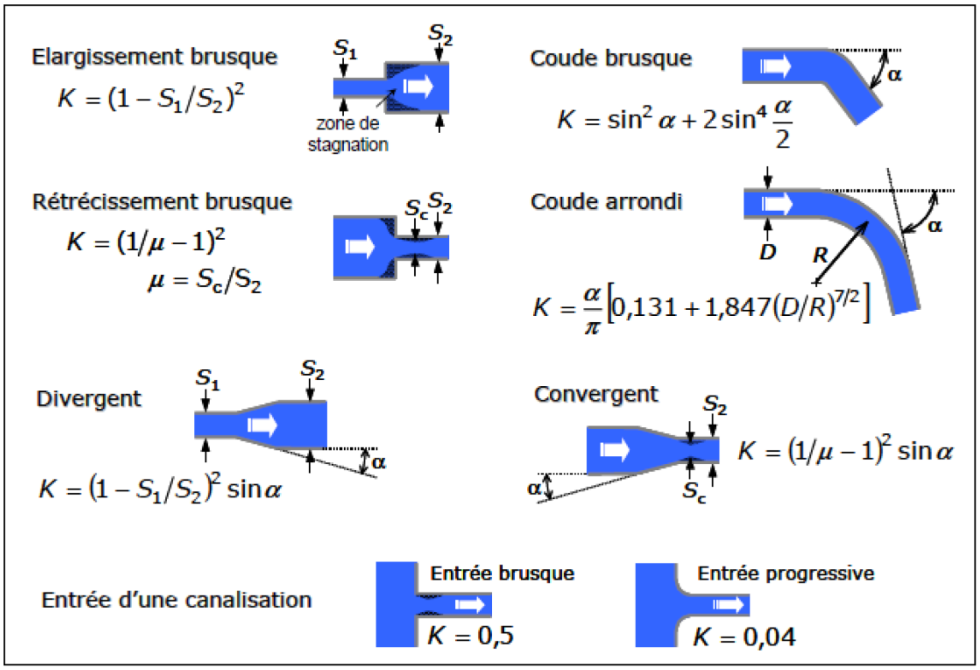


Figure 2 – Exemples de coefficients $K$ de perte de charge singulière. Ils ne sont pas à connaître.

# 4 Pompes et relation de Bernoulli généralisée

Une pompe apporte de l'énergie au fluide et fait ainsi augmenter la charge (elle peut servir à notamment compenser les pertes de charge). On définit généralement le *travail indiqué* $w_i$ comme étant l'énergie par unité de masse que la pompe apporte au fluide. $w_i$ s'exprime ainsi en J/kg.

Ainsi la **puissance** fournie au fluide par la pompe est $\mathcal{P}_{\surd} = D_m w_i = \rho D_v w_i$. De même, la **charge** apportée par la pompe à l'écoulement (exprimée en Pa) est

$$\Delta P_{\text{pompe}} = \rho w_i \tag{11}$$

On peur donc écrire notre relation de Bernoulli généralisée ! On prends en compte la perte de charge $\Delta$Í$P_c$ et le travail indiqué apporté par la pompe.

Pour un fluide réel, entre deux points $A$ et $B$ d'une ligne de courant, entre lesquels il y a une perte de charge $\Delta P_c$ et une pompe apportant le travail indique $w_i$, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit

$$P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} + gz_B - \left(P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + gz_A\right) = -\Delta P_c + \rho w_i \tag{12}$$

Cette relation peut s'écrire en puissance si on multiplie par le débit volumique :

$$D_v P_B + D_m\frac{v_B^2}{2} + D_m g z_B - \left(D_v P_A + D_m\frac{v_A^2}{2} + D_m g z_A\right) = -D_v\Delta P_c + D_m w_i \tag{13}$$