

Thermodynamique - Chap. I : Diffusion thermique

20 octobre 2025

Expérience : Goutte d'encre dans un verre. On voit ici la diffusion de particules, c'est la même chose qui se passe pour la température lorsqu'on parle de *diffusion thermique*.

Déf : La *diffusion* d'une quantité est un phénomène de transport irréversible qui tend à l'homogénéisation de cette quantité. Ce transport se fait sans mouvement d'ensemble (la position du centre de masse du système est a priori constante dans le temps).

La diffusion thermique est un des trois modes de transport de chaleur avec

- La *convection* qui est le transport de chaleur par mouvement de fluide.
- Le *rayonnement*, apport de chaleur par une onde électromagnétique (on a chaud au soleil).

1 Notion de flux thermique

1.1 Flux et énergie

Expérience : Une plaque de bois, carrelage, métal et des thermomètres (classique et laser). Toutes ces surfaces sont à la même température mais on ne sent pas la même chose lorsqu'on les touche.

En été quand on entre dans une voiture bien chaude, les parties métalliques des ceintures sont brûlantes au toucher : pourtant elles sont à la même température que les sièges.

Conclusion : nous ne sommes pas sensibles à la température d'un objet lorsqu'on le touche mais au **flux de chaleur**.

Notons Φ le *flux* (ou la puissance) thermique diffusive traversant la surface S (orientée, voir figure 1) et δQ l'énergie traversant cette surface pendant dt .

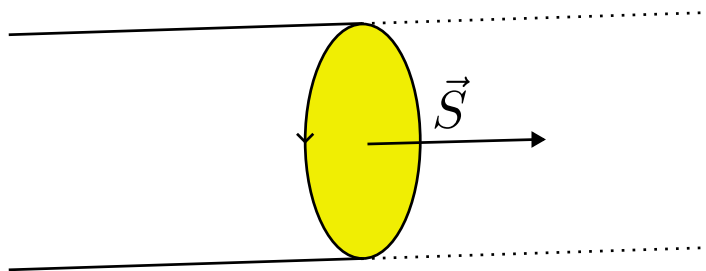


FIGURE 1 – Surface orientée $\vec{S}$.

C'est ce flux Φ que l'on ressent lorsque l'on pose la main sur un objet chaud ou froid. On a $\Phi = \delta Q/dt$.

1.2 Vecteur densité de flux thermique

On définit $\vec{j}_Q$ le *vecteur densité de flux thermique* tel que

$$\Phi = \iint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \delta Q = \iint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt \quad (1)$$

Remarque : L'énergie traversant la surface *infinitésimale* $d\vec{S}$ pendant dt est $\delta^{II}Q = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$. Le *II* nous rappelle que cette quantité est "deux fois" infinitésimale : par rapport au temps dt et à l'espace $d\vec{S}$.

Remarque : On peut faire une analogie avec la mécanique des fluides, on avait introduit le vecteur densité de courant (HP) $\vec{j} = \rho \vec{v}$ tel que

$$D_m = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad dm = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} dt \quad (2)$$

$\vec{j}$ représente le flux local de masse, $\vec{j}_Q$ le flux local d'énergie thermique (transportée par diffusion).

Unité : $\vec{j}$ est en W/m^2 , c'est un flux de puissance surfacique.

En poursuivant cette analogie avec la mécanique des fluides, en méca flu une différence de pression induit une vitesse un $\vec{j}$ non nul. Ici dans notre cas de diffusion thermique, ce sera une **différence de température**.

Pour décrire cela nous avons besoin de quelques outils mathématiques supplémentaires.

1.3 Dérivées partielles et gradient

1.3.1 Dérivées partielles

Dans notre étude de la diffusion thermique, la température sera une fonction de l'espace et du temps. À priori en 3D on a $T(x, y, z, t)$. Regardons comment cela se passe déjà en 1D pour $T(x, t)$. On définit alors les dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x + dx, t) - T(x, t)}{dx} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt}. \quad (3)$$

En pratique on dérive par rapport à la variable concernée en considérant que la ou les autres variables sont constantes.

Cas pratique : Soit $f(x, t) = at^2 + bx + cx^2t$. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b + 2cxt \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 2at + cx^2. \quad (4)$$

Dernier exemple $f(x, t) = \sin(kx) \exp(-t/\tau)$. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k \cos(kx) \exp(-t/\tau) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \sin(kx) \exp(-t/\tau). \quad (5)$$

1.3.2 Gradient

L'étude en 3D est HP en diffusion thermique : cependant tout ce qu'on fait ici nous servira en électromagnétisme.

En 3D la température peut dépendre des trois coordonnées d'espace. Le gradient sert à exprimer en un seul vecteur la variation spatiale de la température (voir figure 2).

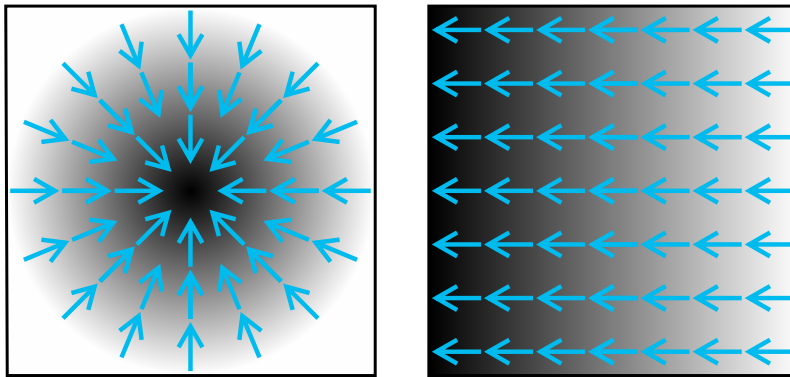


FIGURE 2 – Deux exemples de champ scalaires, les valeurs importantes étant représentées par une couleur plus sombre. Le gradient est dans chaque cas représenté par les flèches bleu, est orienté dans le sens de variation du champ, des valeurs faibles vers les grandes. [Source](#).

Son expression est

$$\vec{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (6)$$

Propriétés :

- Il est orthogonal aux isovaleurs (ici aux isothermes).
- Il va des valeurs faibles vers les valeurs hautes ("gradient grandit").

1.4 Loi phénoménologique de Fourier

Nous pouvons maintenant exprimer comment le vecteur densité de flux thermique est lié aux différences de température, selon la

Loi phénoménologique de Fourier : (à 1D selon l'axe x)

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x \quad (7)$$

Loi phénoménologique de Fourier : (à 3D, HP)

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (8)$$

où on a noté λ la conductivité thermique du matériau

Interprétation et remarques :

- Le gradient allant des températures froides vers chaudes et $\lambda > 0$, le flux de chaleur va du chaud vers le froid (ouf).
- Plus la différence de température est élevée plus le flux thermique est important.
- Plus la conductivité thermique est importante, plus le flux thermique est important. C'est ce qui explique l'expérience faite au début du cours, les matériaux présentés n'ont pas tous la même conductivité thermique.
- On retrouve bien le cas 1D à partir du cas 3D en prenant l'expression du gradient.
- La conductivité thermique λ a pour unité $[\lambda] = \text{W m}^{-2} \text{m K}^{-1} = \text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$.
- C'est une loi *phénoménologique* donc issue de l'observation.

Ordre de grandeur de conductivité thermique :

Matériau	Conductivité thermique $\lambda (\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1})$
Air	$2,6 \times 10^{-2}$
Laine de verre	3×10^{-2}
Bois	0,2
Eau liquide	0,61
Béton	0,92
Cuivre	384

TABLE 1 – Différentes conductivités thermiques.

2 Équation de la chaleur

Expérience en classe : diffusion de la chaleur à travers une barre de cuivre. Voir figure 3.

2.1 Bilan d'énergie interne et équation de la chaleur

On veut utiliser la conservation de l'énergie interne pour faire le lien entre température et flux. Par exemple, intuitivement on voit que dans un système si le flux thermique entrant est plus grand que le flux thermique sortant alors la température augmente. On va traduire ça en équation.

On va faire un bilan d'énergie interne en 1D sur une tranche comprise entre x et $x + dx$, de surface latérale dS (voir figure 4). La capacité thermique massique du matériau est noté c_p , sa masse volumique ρ et sa conductivité thermique λ . La masse de la tranche est notée dm .

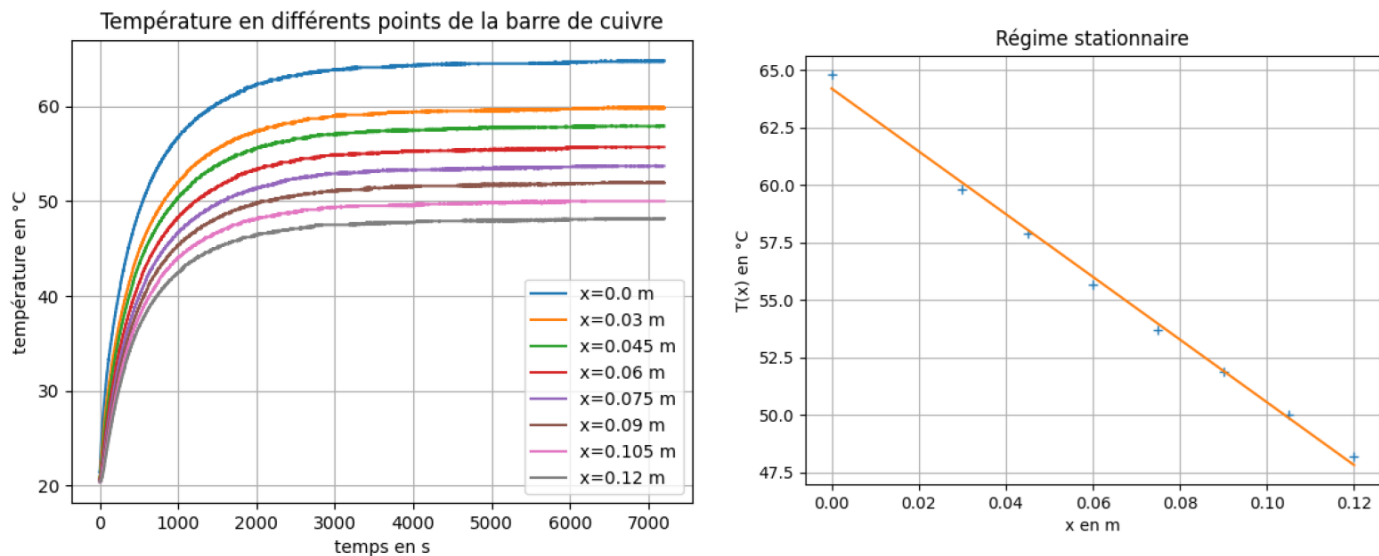


FIGURE 3 – Données de l'expérience réalisée en classe. À gauche, les courbes d'évolution de la température en fonction du temps pour les différents points de la barre de cuivre. À droite la température des différents points, atteinte en régime stationnaire, en fonction de la position des points.

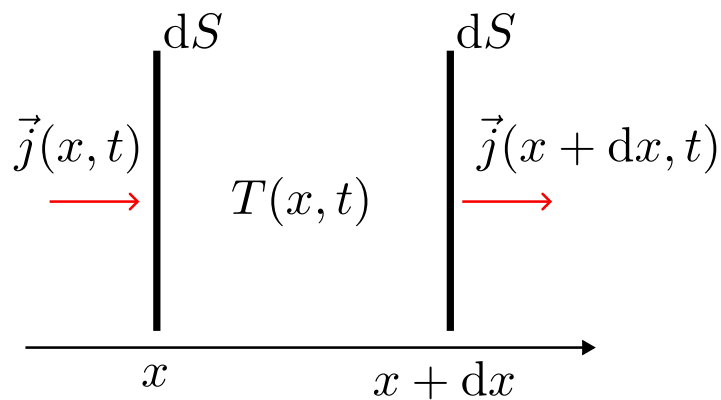


FIGURE 4 – Schéma du système infinitésimal sur lequel on fait un bilan d'énergie interne.

La variation d'énergie interne de la tranche, entre t et $t + dt$ est

$$dU = dmc_p(T(x, t + dt) - T(x, t)) = c_p \rho dS dx dt \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt} = \rho c_p dS dx \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (9)$$

Cette variation d'énergie interne est due aux flux entrants et sortants, exprimons les. Notons δQ_e l'énergie qui entre dans le système entre t et $t + dt$. On a

$$\delta^{II} Q_e = j_Q(x) dS dt \quad (10)$$

De même l'énergie sortante δQ_s est

$$\delta^{II} Q_s = j_Q(x + dx) dS dt \quad (11)$$

Le premier principe de la thermodynamique nous donne (pas de partie mobile, pas de forces de pression, seulement des échanges de chaleur)

$$dU = \delta^{II} Q_e - \delta^{II} Q_s \quad (12)$$

en effet la variation c'est l'entrée moins la sortie (variation de nombre de personnes dans un bus).

Ainsi

$$\rho c_p S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -dS dt (j_Q(x + dx, t) - j_Q(x, t)) \implies \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx = -dx \frac{j_Q(x + dx, t) - j_Q(x, t)}{dx} \quad (13)$$

On a l'équation de conservation de l'énergie interne

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

analogie avec l'équation de conservation de la masse (HP) si on l'a vu en MF.

On peut maintenant utiliser la **loi de Fourier** pour finir le travail

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x \quad (15)$$

on a donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

on note $D = \lambda/(\rho c_p)$ le *coefficient de diffusion* (ou diffusivité thermique).

L'équation de diffusion thermique (ou équation de la chaleur) est

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

2.2 Coefficient de diffusion

L'unité du coefficient de diffusion D est le m^2/s . Autant λ va piloter le flux (sortant ou entrant, et dépendant de la différence de température) d'énergie thermique, D caractérise la "vitesse" de changement de la température dans un matériau.

Grâce à l'équation de la chaleur, on peut obtenir par analyse dimensionnelle le temps caractéristique de diffusion τ dans un matériau de coefficient de diffusion D sur une distance L . En effet on a

$$D \simeq \frac{L^2}{\tau} \iff L \simeq \sqrt{D\tau} \iff \tau \simeq \frac{L^2}{D} \quad (18)$$

Ordre de grandeurs :

Pour notre expérience on a $L = 19 \text{ cm}$ et $D \simeq 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ainsi $\tau \simeq 3,3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 5,5 \text{ min}$. À l'œil c'est environ 1 h, c'est pas si loin.

2.3 Régime stationnaire

En régime stationnaire, la température ne dépend plus du temps. L'équation de diffusion devient

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \implies \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \implies T = Ax + B \quad (19)$$

Matériau	Diffusivité thermique $D(\text{m}^2/\text{s})$
Air	2×10^{-5}
Laine de verre	6×10^{-7}
Bois	2×10^{-7}
Eau liquide	5×10^{-7}
Béton	5×10^{-7}
Cuivre	$1,1 \times 10^{-4}$

TABLE 2 – Différent coefficients de diffusion thermiques.

2.4 Résistance thermique

Supposons maintenant qu'on est en régime stationnaire mais que les températures sont imposées au bord. Par exemple, on est en hiver, on a un mur de béton d'épaisseur e , dehors il fait $T_f = 0^\circ\text{C}$ et à l'intérieur $T_c = 25^\circ\text{C}$. On place l'origine au bord du mur à l'intérieur.

On a vu que dans le mur, en régime stationnaire, la température est

$$T(x) = Ax + B \quad (20)$$

or $T(x = 0) = T_c$ ainsi $B = T_c$ et $T(x = e) = T_f$ ainsi

$$Ae + T_c = T_f \implies A = \frac{T_f - T_c}{e}. \quad (21)$$

Donc

$$T(x) = T_c - \frac{T_c - T_f}{e}x \quad (22)$$

La densité de flux thermique qui traverse le mur est

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{T_c - T_f}{e} \quad (23)$$

et finalement le flux thermique traversant le mur de surface S est

$$\Phi = jS = \lambda S \frac{T_c - T_f}{e}. \quad (24)$$

On note ΔT la différence de température (positive) entre intérieur et extérieur et $R_{\text{th}} = e/(\lambda S)$ la *résistance thermique* du mur pour obtenir

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{th}}} \iff \Delta T = R_{\text{th}} \Phi \quad (25)$$

Remarques :

- Cette équation est l'analogue de la loi d'Ohm $I = U/R$. Le courant I crée par la différence de potentiel U est d'autant plus faible que la résistance du circuit R est grande. Ici, le flux thermique Φ crée par la différence de température ΔT est d'autant plus faible que la résistance thermique du matériau est grande.
- On a $R_{\text{th}} = e/(\lambda S)$. Plus le mur est épais, plus il isole, plus il est conducteur moins il isole, plus la surface du mur est grande plus le flux qui passe est grand.

On peut associer des résistances thermiques en série ou en parallèle (voir figure 5). En série, elles seront traversées par le même flux thermique. En parallèle elles seront soumises à la même différence de température.

3 Loi de conducto-convection de Newton

Le but : décrire le transfert thermique entre une paroi solide et un liquide de températures différentes.

Soit un solide 1 de température T_1 et un fluide 2 de température T_2 , $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur normal à la surface de contact, orienté de 1 vers 2. On définit h le *coefficient conducto-convectif* par la loi de conducto-convection de Newton donnant la densité de flux thermique à l'interface

$$\vec{j}_{\text{cc}} = h(T_1 - T_2)\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (26)$$

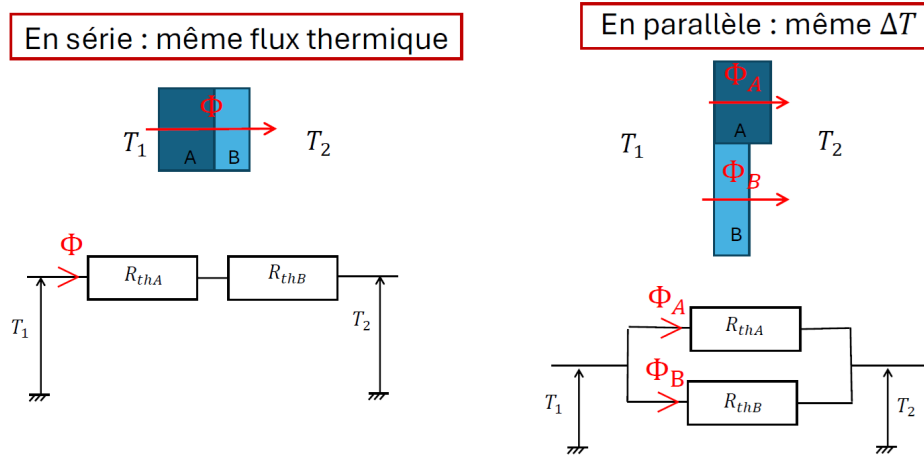


FIGURE 5 – Associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.

On vérifie : si $T_1 > T_2$, $\vec{j}_Q$ est orienté de 1 vers 2 donc le transfert thermique se fait bien du chaud au froid. L'unité de h est le $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$.

Ainsi si la surface de contact entre le solide et le fluide est S et qu'on suppose les températures uniformes sur cette surface, l'énergie thermique cédée de la part du solide au fluide δQ_{cc} pendant la durée dt est

$$\delta Q_{cc} = hS(T_1 - T_2)dt. \quad (27)$$

La formule n'est pas à connaître mais à savoir utiliser : il faut savoir retrouver le signe et l'unité de h .

Exemple : Une casserole de capacité thermique C et de température initiale T_c (puis notée $T(t)$) se refroidit dans l'air ambiant de température T_f . La surface d'échange entre les deux est S .

Entre t et $t + dt$, la casserole cède l'énergie δQ_{cc} à l'air ambiant

$$\delta Q_{cc} = h(T - T_f)Sdt. \quad (28)$$

Pendant ce même laps de temps la température de la casserole diminue donc son énergie interne varie de

$$dU = CdT = C(T(t + dt) - T(t)) = C \frac{dT}{dt} dt \quad (29)$$

En appliquant le premier principe

$$dU = -\delta Q_{cc} \implies C \frac{dT}{dt} dt = -h(T - T_f)Sdt. \quad (30)$$

Ainsi

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{C}T = \frac{hS}{C}T_f \quad (31)$$

On résout cette équation différentielle du premier ordre en sommant la solution sans second membre et la solution stationnaire

$$T(t) = A \exp\left(-\frac{hS}{C}t\right) + T_f \quad (32)$$

on note $\tau = C/hS$ le temps caractéristique de refroidissement de la casserole, pour mettre la solution sous la forme

$$T = A \exp(-t/\tau) + T_f. \quad (33)$$

Finalement à $t = 0$ on a $T = T_c$ donc

$$T = (T_c - T_f) \exp(-t/\tau) + T_f. \quad (34)$$

Décroissance exponentielle de la température de la casserole, de temps caractéristique $\tau = C/(hS)$. Plus h et S sont grands plus le refroidissement est rapide, plus C est grand plus le refroidissement est lent. En cas de brassage de l'air (ventilation), h augmente et le refroidissement est plus rapide.

On peut vérifier l'unité $[\tau] = \text{J K}^{-1} \text{m}^{-2} \text{W}^{-1} \text{m}^2 \text{K} = \text{J/W} = \text{s}$.

Exo TD : Ailette de refroidissement.

4 Irréversibilité du phénomène de diffusion

4.1 Second principe

La diffusion est un phénomène *intrinsèquement* irréversible. En effet, dans l'exemple précédent de la casserole, on n'imagine pas la transformation inverse : l'air et la casserole à la même température $T_f + \delta T$ puis la casserole chaude à T_c et l'air à T_f . Pourtant cette transformation ne viole pas le premier principe (elle conserve l'énergie interne). De même si on met une goutte d'encre dans de l'eau, on n'imagine pas l'encre se rassembler pour reformer la goutte.

Comme d'habitude en thermodynamique, nous allons relier cette intuition au **second principe** de la thermodynamique, à l'aide de l'entropie S .

L'identité thermodynamique sur l'énergie interne est

$$dU = TdS - PdV. \quad (35)$$

Dans notre cas (typiquement l'exemple de la casserole) nous n'avons pas de changement de volume donc

$$dS = \frac{dU}{T} \quad (36)$$

Or on sait qu'on peut écrire

$$dS = \delta S_e + \delta S_c \quad (37)$$

avec δS_e l'entropie échangée lors de la transformation et δS_c l'entropie créée au cours de celle-ci. Dans le cas d'un transfert thermique avec un thermostat de température T_f

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_f}. \quad (38)$$

Le second principe de la thermodynamique est

$$\delta S_c \geq 0. \quad (39)$$

Si $\delta S_c = 0$ alors la transformation est réversible, sinon elle est irréversible (la transformation inverse ne peut exister car elle ferait disparaître de l'entropie).

Utilisons cela dans l'exemple de la casserole et vérifions que l'entropie créée est strictement positive.

4.2 Application

On a $T(t)$ la température de la casserole et T_f la température de l'air, avec à tout temps $T(t) > T_f$.

On commence avec une transformation infinitésimale.

$$dS = \delta S_e + \delta S_c = \frac{\delta Q}{T_f} + \delta S_c = \frac{dU}{T(t)} = \frac{\delta Q}{T}. \quad (40)$$

avec δQ l'énergie thermique **cédée** par la casserole, on a $\delta Q < 0$ (on l'a vu avec notre loi de conducto convection). Ainsi

$$\delta S_c = \delta Q \left(\frac{1}{T(t)} - \frac{1}{T_f} \right) = \delta Q \frac{T_f - T(t)}{T_f T(t)} > 0 \quad (41)$$

tant que $T(t) - T_f > 0$. Ainsi dès que les températures sont différentes, le transfert thermique par diffusion est **irréversible**.

On peut faire de même avec la transformation complète de T_c à T_f . Dans ce cas la on a

$$\Delta S = S_e + S_c = \int_{T_c}^{T_f} dS = \int_{T_c}^{T_f} \frac{dU}{T} = \int_{T_c}^{T_f} \frac{CdT}{T} = C \ln \left(\frac{T_f}{T_c} \right) \quad (42)$$

Or

$$S_e = \frac{Q}{T_f} = \frac{\Delta U}{T_f} = \frac{C(T_f - T_c)}{T_f} \quad (43)$$

Ainsi

$$S_c = \Delta S - S_e = C \ln \frac{T_f}{T_c} - C \left(1 - \frac{T_c}{T_f} \right) = C \left(\frac{T_c}{T_f} - 1 - \ln \left(\frac{T_c}{T_f} \right) \right). \quad (44)$$

S_c est donc de la forme $x - 1 - \ln x$ avec $x = T_c/T_f > 1$ (sinon il ne se passe rien. Or pour $x > 1$, on a $x - 1 - \ln x > 0$ (voir figure 6).

On a donc bien $S_c > 0$: la transformation est irréversible!

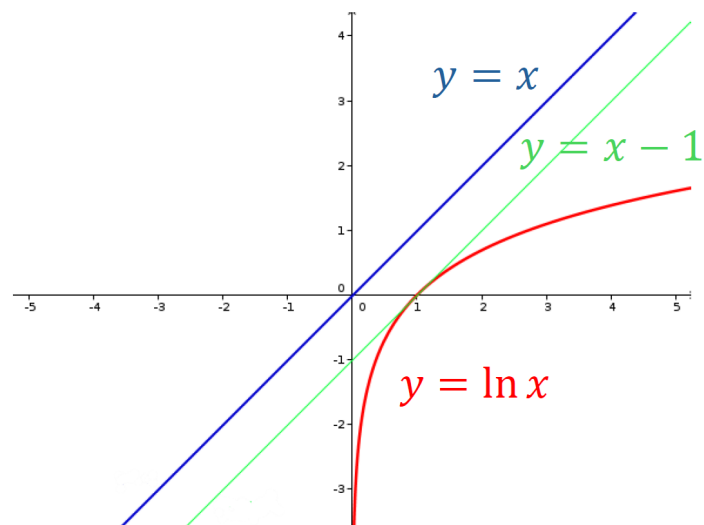


FIGURE 6 – Fonctions utiles