Programme de khôlle 13
Semaine du 5 janvier 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***equadiff2(a,b,c)*** qui reçoit trois flottants en argument et qui trace la courbe représentative de la solution de :
$$y'' + ay' + by = \sqrt{1 - x^2}$$
sur l'intervalle $]-1;1[$ avec les conditions initiales $y(-1) = c$ et $y'(-1) = 0$.
2. ***equadiff1(a)*** qui reçoit trois flottants en argument et qui trace la courbe représentative de la solution de :
$$(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$$
sur l'intervalle $[0;0,5[$ avec la conditions initiales $y(0) = a$.
3. ***somme_part(n)*** qui trace la courbe représentative sur $[0,1;0,5]$ de la fonction S_n définie par $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+2}{k+1} x^k$.

2 Pratique calculatoire

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $(1 + x)y' + y = 1 + \ln(1 + x)$ sur $] - 1, +\infty[$;
   (c) $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
2. Déterminer les solutions réelles des problèmes de Cauchy suivants :
   (a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$
   (b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$
   (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *Trouver toutes les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle :*

$$x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$$

Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3.2.

1. *Donner le rayon de convergence et exprimer la somme en termes de fonction usuelle de la série* $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$.
2. *Résoudre sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *l'équation différentielle suivante :*

$$x\left(1+(\ln(x))^2\right)y' + 2\ln(x)y = 1.$$

Indication : *on pourra s'intéresser à la dérivée de la fonction :*

$$A(x) = \ln\left(1+(\ln(x))^2\right).$$

Exercice 3.3.

1. *Donner le rayon de convergence et exprimer la somme en termes de fonction usuelle de la série* $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1}x^n$.

   Indication : *on pourra chercher* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *tel que* $\frac{n+2}{n+1} = a + \frac{b}{n+1}$
2. *Résoudre sur* $]-1;1[$ *l'équation différentielle suivante :*

$$\left(t^2-1\right)y' + ty = t^3 - t.$$

Chap.9 : Séries entières

1 Convergence d'une série entière

2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

3 Cas d'une série entière d'une variable réelle
3.1 Fonction somme
3.2 Continuité, dérivabilité
3.3 Intégration terme à terme

4 Développement d'une fonction en série entière

5 Application des développements en série entière
5.1 Calcul de la somme d'une série entière
5.2 Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle

6 Exponentielle complexe

Chap.10 : Équations différentielles scalaires