

Exercices

Chap.10 : Équations différentielles scalaires

1 Ordre 1

Exercice 1.1. 1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$2ty' + y = \frac{1}{t}.$$

2. Résoudre sur \mathbb{R}^{+*} l'équation différentielle suivante :

$$ty' - 2y = t^3.$$

3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2xy = -(2x - 1)e^x.$$

Exercice 1.2. 1. Déterminer les fonctions à valeurs complexes solutions de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{(1+2i)t}.$$

2. Déterminer les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \cos(2t)e^t.$$

Indication : penser à utiliser la question 1.

Exercice 1.3. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y' + xy = 0$$

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $] -1; 1[$.
2. Quelles sont les solutions de (E) sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$?
3. Existe-t-il des solutions de (E) sur \mathbb{R} ?

2 Ordre 2 à coefficients constants

Exercice 2.1. 1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = e^t.$$

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = \cos(2t).$$

3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 3y = e^t + \cos(2t).$$

Exercice 2.2. k étant un nombre réel fixé, on cherche, sur \mathbb{R} , les solutions de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k) : y'' - 2ky' + (k^2 + 1)y = \sin t + te^{kt}.$$

On appelle (\mathcal{F}_k) et (\mathcal{G}_k) les équations différentielles :

$$(\mathcal{F}_k) : y'' - 2ky' + (k^2 + 1)y = \sin t$$

$$(\mathcal{G}_k) : y'' - 2ky' + (k^2 + 1)y = te^{kt}.$$

1. Résoudre l'équation homogène (\mathcal{H}_k) associée à l'équation (\mathcal{E}_k) .

2. On suppose dans cette question que $k = 0$.

(a) Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle (\mathcal{F}_0) .

(b) Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation différentielle (\mathcal{G}_0) .

3. On suppose dans cette question que $k \neq 0$.

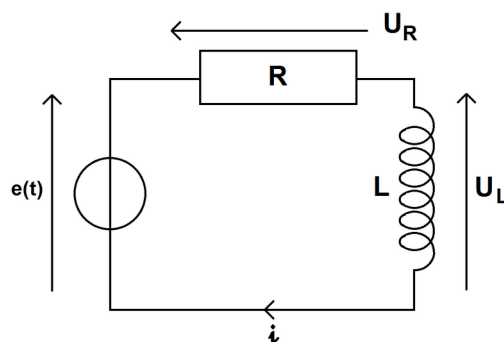
(a) Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle (\mathcal{F}_k) .

(b) Déterminer une solution particulière y_2 de l'équation (\mathcal{G}_k) sous la forme $y_2(t) = (at + b)e^{kt}$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}_k) suivant les valeurs de k .

Exercice 2.3. La tension u du condensateur d'un circuit RLC est une fonction du temps vérifiant l'équation différentielle

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = E$$



1. Déterminer une solution particulière u_0 de cette équation.
2. On donne $R = 10\Omega$, $L = 0,1H$, $C = 5.10^{-6}F$ et $E = 12V$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.
3. Déterminer l'unique solution vérifiant les conditions initiales usuelles $u(0) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0) = 0$ et tracer cette fonction à l'aide de votre calculatrice.

3 Ordre 2

Exercice 3.1. On souhaite résoudre sur $I =]-1; +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^x$$

1. Trouver une solution particulière de l'équation homogène associée à (E) sous la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$ à déterminer.
2. À l'aide de la méthode de Lagrange résoudre l'équation (E) sur I .

Exercice 3.2. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0$$

1. Soit z une application deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
On pose $\forall x \in]0, +\infty[, y(x) = z(\ln x)$.
Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, l'application z est solution sur \mathbb{R} d'une équation différentielle à préciser que l'on notera (H).
2. Résoudre (H).
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution du système suivant :
$$\begin{cases} (E) \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}.$$

4 Pour aller plus loin...

Exercice 4.1. Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 4.2. On propose de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) : y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0.$$

1. Soit y une fonction solution du problème. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = y(e^t) e^{-\frac{t}{2}}.$$

- (a) Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$ pour $x > 0$.
- (b) En déduire que la fonction $t \mapsto z(t)$ vérifie sur \mathbb{R} une équation (\mathcal{E}') d'ordre 2 à coefficients constants.
- (c) Résoudre (\mathcal{E}') .

2. Résoudre l'équation (\mathcal{E}) .

Exercice 4.3. : L'équation différentielle

$$(E) : |t|y' + (t - 1)y = t^3$$

admet-elle des solutions définies sur \mathbb{R} ?

Indication : on pourra d'abord la résoudre sur des intervalles où l'on peut la mettre sous "forme résolue", c'est-à-dire sous la forme :

$$y' + a(t)y = b(t).$$