Chap.11 : Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

E désigne un espace vectoriel réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), pas nécessairement de dimension finie.
On rappelle que $E \times E$ désigne l'ensemble des couples (x, y), où x et y sont deux vecteurs de E.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser la notion de produit scalaire, connue dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, à d'autres espaces vectoriels.

1 Généralités sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1. *On dit qu'une application $\langle . \mid . \rangle : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ est un* ***produit scalaire*** *sur E si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :*

- *L'application $\langle . \mid . \rangle$ est* ***symétrique*** *:*

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E, \quad \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle$$

- *L'application $\langle .|. \rangle$ est* ***bilinéaire*** *: $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E \times E \times E, \quad \forall a \in \mathbb{R}$:*

$$\langle a\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{z} \rangle = a\langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{z} \rangle$$
$$\langle \vec{x} \mid a\vec{y} + \vec{z} \rangle = a\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{z} \rangle;$$

- *L'application $\langle . \mid . \rangle$ est* ***positive*** *:*

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geqslant 0;$$

- *L'application $\langle . \mid . \rangle$ est* ***définie*** *: $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{0}$*

On dit qu'un produit scalaire est une "forme bilinéaire symétrique définie positive".

Remarque 1.2.
Si une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est symétrique et linéaire à gauche, alors la linéarité à droite est automatique.

ATTENTION ! ! ! *La propriété " φ est positive" ne signifie pas que*

$$\varphi(x, y) \geq 0 \text{ pour tout } (x, y) \in E \times E \ .$$

Ce n'est pas possible de toute façon puisque $\varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$ par linéarité à droite.

Le produit scalaire peut aussi se noter $(\vec{x} \mid \vec{y})$ ou $\vec{x} \cdot \vec{y}$.
La notation du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne sera pas toujours adaptée car le point désigne dans les espaces vectoriels la multiplication d'un scalaire par un vecteur et pour les réels le point désigne parfois la multiplication.

Définition 1.3. • *Un **espace préhilbertien réel** est un couple*

$$(E, \langle . \mid . \rangle)$$

où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle . \mid . \rangle$ est un produit scalaire sur E.

- *Un espace préhilbertien $(E, \langle . \mid . \rangle)$, où E est de dimension finie, s'appelle un **espace euclidien**.*

Remarque 1.4. • *Sur un même espace vectoriel on peut définir plusieurs produits scalaires.*

- *Tous les espaces vectoriels ne sont pas des espaces préhilbertiens (il n'est pas toujours possible de construire un produit scalaire).*
- *Dans le chapitre suivant, nous étudierons plus précisément certaines applications définies sur des espaces euclidiens.*

Application 1.5. *L'application $\langle . \mid . \rangle$ définie sur $E \times E$ où $E = \mathbb{R}^2$ par :*

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 10x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2,$$

où $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$, est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Application 1.6. *L'application $\langle . \mid . \rangle$ définie* sur $E \times E$ *où $E = \mathbb{R}^3$ par :*

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1$$

où $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

Application 1.7. *L'application* $\langle . \mid . \rangle$ *définie sur* $E \times E$ *où* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *par :*

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k$$

où $P = p_0 + p_1 X + \ldots + p_n X^n$ *et* $Q = q_0 + q_1 X + \ldots + q_n X^n$, *est-elle un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *?*

Application 1.8. *Montrer que l'application* $\langle . \mid . \rangle$ *définie* sur $E \times E$ *où* $E = \mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$ *par :*

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a;b], \mathbb{R})$.

Remarque 1.9.
- ***ATTENTION !!!*** *La condition de continuité est ici indispensable pour assurer le caractère "défini positif".*

- *L'application* $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ *n'est pas un produit scalaire sur* $\mathscr{C}_M([a, b], \mathbb{R})$ *(espace des fonctions réelles continues par morceaux).*
- *L'application définie par* $\langle f, g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$*, est aussi un produit scalaire sur* $\mathscr{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ *(utilisé pour le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction).*

1.2 Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 1.10. *L'application* $\langle . \mid .\rangle$ *définie* sur $E \times E$ *où* $E = \mathbb{R}^n$ *par :*

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \text{avec } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ *que l'on appelle le* ***produit scalaire canonique*** *sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Preuve :

Application 1.11. *L'application* $\langle . \mid .\rangle$ *définie sur* $E \times E$ *où* $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *par* $\langle X \mid Y\rangle = X^T \times Y$ *est un produit scalaire sur* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.*

1.3 Norme euclidienne

1.3.1 Définitions

Définition 1.12. *Soit $(E, \langle . \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle* ***norme euclidienne*** *ou* ***norme associée au produit scalaire*** *$\langle . \mid . \rangle$, l'application, notée $\|.\|$, de E dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}$$

Exemple 1.13.

- *On reprend le produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :*

$$\langle P \mid Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k.$$

La norme associé à ce produit scalaire est :

$$\|P\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p_k^2}.$$

Et donc $\|X^n\| = 1$

- *On prend le produit scalaire défini sur $\mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$ par :*

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

. La norme associée à ce produit scalaire est :

$$\|P\| = \sqrt{\int_0^1 (P(t))^2 \ \mathrm{d}t}.$$

On a donc ici :

$$\|X^n\| = \sqrt{\int_0^1 (t^n)^2 \ \mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

Définition 1.14. *Soit $(E, \langle . \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\vec{x} \in E$.*
On dit que le vecteur $\vec{x}$ est ***unitaire*** *ou normé s'il vérifie $\|\vec{x}\| = 1$.*

1.3.2 Propriétés importantes

Dans toute cette partie $(E, \langle . \mid \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Proposition 1.15. *Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$ on a :*

- *Identités remarquables :*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \ \text{ et } \ \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2$$

- *Identités de polarisation :*

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2}{2} \quad \text{et } \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{4}$$

- *Identité du parallélogramme :*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right).$$

Preuve :

Théorème 1.16. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***
Pour tout $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$ on a :

$$|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

De plus $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ (cas d'égalité) si, et seulement si, la famille $(\vec{x},\vec{y})$ est liée.

Preuve :

Proposition 1.17. *La norme euclidienne vérifie :*

- $\|.\|$ *est une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *;*
- $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
- $\forall \vec{x} \in E \ \|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{0}$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E$ *on* a : $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. *(Inégalité triangulaire)*

Remarque 1.18. *En mathématiques, toute application qui vérifie les quatre points de la propriété précédente, s'appelle une* ***norme****.*
Dans notre cas, la norme a été définie à partir d'un produit scalaire, c'est pourquoi on l'appelle une ***norme euclidienne****.*
Mais il existe des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire (des ***normes non euclidiennes****).*

Preuve : Démonstration de l'inégalité triangulaire

1.4 Distance euclidienne

Définition 1.19. *Soit* $(E, \langle . \mid . \rangle)$ *un espace préhilbertien.*
On appelle ***distance euclidienne*** *associée au produit scalaire* $\langle . \mid . \rangle$*, l'application, notée* $\mathrm{d}(.,.)$*, de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Proposition 1.20. *L'application* d *vérifie les 4 points suivants :*

- *d est une application de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}^+$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E, \ \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times E, \ \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{d}(\vec{y}, \vec{x})$
- $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E \times E \times E, \ \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{z}) + \mathrm{d}(\vec{z}, \vec{y})$

Remarque 1.21. *En mathématiques, toute application qui vérifie les 4 points de la propriété précédente s'appelle une distance. Dans notre cas la distance a été définie à partir d'une norme euclidienne (c'est-à-dire une norme qui provient elle-même d'un produit scalaire), c'est pourquoi on dit* *qu'il s'agit d'une distance euclidienne.*

Il est possible de construire des distances qui ne proviennent ni d'une norme ni d'un produit scalaire.

Dans la suite de ce chapitre $(E, \langle . \mid . \rangle)$ désigne un espace préhilbertien réel, $\|.\|$ la norme euclidienne associée et $\mathrm{d}(.,.)$ la distance euclidienne associée.

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 2.1. *Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E.*
On dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont ***orthogonaux*** *lorsque :*

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$$

On note alors $\vec{x} \perp \vec{y}$

Application 2.2. *On considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0;2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant :*

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \sin(x)$ sont orthogonales pour ce produit scalaire.

Application 2.3. *Sur $\mathbb{R}_n[X](n \geqslant 2)$, on reprend les deux produits scalaires suivants :*

$$\langle P \mid Q \rangle_1 = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k \quad \langle P \mid Q \rangle_2 = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Les deux polynôme X^2-1 et $2X$ sont-il orthogonaux respectivement à chacun de ces deux produits scalaires ?

Définition 2.4. *Soit* $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E.
On dit que la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ *est une* ***famille orthogonale*** *lorsque :*

$$\forall (i,j) \in I^2 \text{ tels que } i \neq j, \vec{u}_i \perp \vec{u}_j.$$

Définition 2.5. *Soit* $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E.
On dit que la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ *est une* ***famille orthonormale*** *ou* ***orthonormée*** *lorsque :*

1. *c'est une famille orthogonale*
2. $\forall i \in I, \|\vec{u}_i\| = 1.$

2.2 Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel

Définition 2.6. *Soit* $\vec{u} \in E$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E.
On dit que $\vec{u}$ *est* ***orthogonal*** *à* F *lorsque :*

$$\forall \vec{f} \in F, \vec{u} \perp \vec{f}$$

Proposition 2.7. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* $\mathscr{F}$ *une famille génératrice de* F.
Alors un vecteur $\vec{u}$ *de* E *est orthogonal à* F *si, et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs de la famille* $\mathscr{F}$.

Application 2.8. *Dans* $\mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel*

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - t = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\right\}.$$

Montrer que le vecteur $\vec{u} = (1,-2,1,-1)$ *est orthogonal à* F.

2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Définition 2.9. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
*On dit que F et G sont **orthogonaux** lorsque pour tout $\vec{f} \in F$ et pour tout $\vec{g} \in G, \vec{f} \perp \vec{g}$.*
On note alors $F \perp G$

2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 2.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*
*On appelle **orthogonal de F**, et on note $F^\perp$, l'ensemble :*

$$F^\perp = \{\vec{u} \in E \text{ tel que } \forall \vec{f} \in F, \langle \vec{u} \mid \vec{f} \rangle = 0\}.$$

Autrement dit, $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Remarque 2.11.
- *$E^\perp = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ car le seul vecteur qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul.*
- *$\left\{\overrightarrow{0}_E\right\}^\perp = E$ car tous les vecteurs de E sont orthogonaux au vecteur nul.*

Application 2.12. *On se place dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :*

$$\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T \times B\right).$$

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Déterminer $\mathscr{D}^\perp$.

Application 2.13. *Reprenons le sous-espace vectoriel F :*

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - t = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\right\}.$$

Déterminer $F^\perp$.

2.5 Propriétés importantes

Proposition 2.14. *Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de vecteurs de E telle que $\forall i \in I, \vec{u}_i \neq 0$.*
Alors la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est une famille libre.

Preuve :

Théorème 2.15. ***Théorème de Pythagore***
Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ *une famille orthogonale de vecteurs de* E*. Alors :*

$$\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n\|^2 = \|\vec{u}_1\|^2 + \|\vec{u}_2\|^2 + \ldots + \|\vec{u}_n\|^2$$

Proposition 2.16. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*.*
Alors $F^\perp$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Preuve :

Proposition 2.17. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*.*
Si $F \perp G$ *alors :*

- $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$
- $F \cap F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$
- $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$

Preuve :

- Soit $\vec{u} \in F \cap G$. On a alors $\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle = 0$ car $\vec{u} \in F$ et $\vec{u} \in G$ et on suppose que les parties sont orthogonales. Donc $\|\vec{u}\| = 0$ et donc $\vec{u} = \overrightarrow{0}$. Ainsi $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Découle directement du point précédent car F et $F^\perp$ sont orthogonales.
- Par définition $\left(F^\perp\right)^\perp = \left\{\vec{u} \in E / \forall \vec{f} \in F^\perp \langle \vec{u} \mid \vec{f} \rangle = 0\right\}$.
  Soit $\vec{w} \in F$.
  On veut montrer que $\vec{w} \in \left(F^\perp\right)^\perp$, c'est-à-dire que pour tout $\vec{f} \in F^\perp$, $\langle \vec{w} \mid \vec{f} \rangle = 0$.
  Or, comme $\vec{w} \in F$ et $\vec{f} \in F^\perp$ on a bien $\langle \vec{w} \mid \vec{f} \rangle = 0$.
  Donc $\vec{w} \in \left(F^\perp\right)^\perp$ et ainsi $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

Remarque 2.18. *En dimension infinie on peut construire des sous-espaces vectoriels* F *tels que* $F \neq E$ *et* $F^\perp = \{0\}$*.*
On a donc, dans ce cas, $\left(F^\perp\right)^\perp = E$*, et cela montre que l'inclusion* $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ *est parfois stricte.*

3 Bases orthonormales

Le but de cette partie est de construire une base orthonormée d'un espace euclidien ou d'un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien.

3.1 La théorie

Le théorème et le corollaire suivant justifient l'existence d'une base orthonormée.

Théorème 3.1. ***Théorème d'orthonormalisation de Schmidt***
Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_N)$ *une famille libre de* E*.*
Alors il existe une unique famille orthonormale $\{\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_N\}$ *vérifiant :*

- $\forall n \in [\![1; N]\!], \mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \mathrm{Vect}\,(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$
- $\forall n \in [\![1; N]\!], \langle \vec{u}_n \mid \vec{\varepsilon}_n \rangle > 0$

Ce théorème sera le plus souvent appliqué à une base de E ou de F, sous-espace vectoriel de E, pour trouver une base orthonormale.

Corollaire 3.2. *Soit* E *un espace euclidien (préhilbertien de dimension finie). Alors il existe une base orthonormée de* E *(abréviation : BON).*

Preuve :

3.2 La pratique

Méthode 3.3. ***Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt***
On dispose d'un espace préhilbertien $(E, \langle . \mid \cdot \rangle)$ *et d'une famille libre* $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_N)$*.*
On souhaite construire une famille orthonormale $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_N)$ *(donc cette nouvelle famille est encore libre) et telle que :*

$$\mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_N) = \mathrm{Vect}\,(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_N)$$

(si on est parti d'une base de E *ou d'un sev de* E *on a encore une base de* E *ou d'un sev de* E*).*
Voici la marche à suivre :

1. *on pose* $\vec{w}_1 = \vec{u}_1$ *;*

2. *on cherche $\vec{w}_2$ sous la forme $\vec{w}_2 = \lambda_1 \vec{w}_1 + \vec{u}_2$.*
3. *on trouve λ grâce à la condition $\langle \vec{w}_1 \mid \vec{w}_2 \rangle = 0$*
4. *on cherche $\vec{w}_3$ sous la forme $\vec{w}_3 = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 + \vec{u}_3$.*
5. *on trouve α et β grâce aux conditions $\langle \vec{w}_1 \mid \vec{w}_3 \rangle = 0$ et $\langle \vec{w}_2 \mid \vec{w}_3 \rangle = 0$*

On répète l'opération jusqu'à obtenir $\vec{w}_n$.

La famille ainsi construite, $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ est alors une famille orthogonale.
On finit en posant $\vec{\varepsilon}_i = \frac{\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|}$.
La famille $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_N)$ est alors orthonormale et vérifie :

$$\mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_N) = \mathrm{Vect}\,(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_N)$$

Application 3.4. *Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z - t = 0\right\}$.*
Chercher une base orthonormée de F.

3.3 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Proposition 3.5. *Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base orthonormée de E.*
Soit $\vec{u} \in E$. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
Alors on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = \langle \vec{u} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle$$

C'est-à-dire : $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \vec{u} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \vec{\varepsilon}_i$.

Preuve :

Cette propriété nous donne un moyen simple de déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une BON : il suffit de calculer $\langle \vec{u} \mid \vec{\varepsilon_i} \rangle$

3.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée

Proposition 3.6. *Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base orthonormée de E.*

- *Pour tout $\vec{u} \in E$, $\|\vec{u}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \vec{u} \mid \vec{\varepsilon_i} \rangle^2$*
- *Pour tout $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in E$, $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \vec{u} \mid \vec{\varepsilon_i} \rangle \times \langle \vec{v} \mid \vec{\varepsilon_i} \rangle$.*

-

Preuve :

4 Projection orthogonale

4.1 Supplémentaire orthogonal

On rappelle que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que F et G sont supplémentaires si, et seulement si, $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et $E = F + G$.
On note alors $E = F \oplus G$.

Définition 4.1. *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*
On dit que G est un ***supplémentaire orthogonal*** *de F lorsque :*

- *F et G sont supplémentaires*
- *$F \perp G$*

On note alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.
On dit aussi que F est un supplémentaire orthogonal de G.

Application 4.2. *On considère l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :*

$$\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right).$$

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Remarque 4.3. *Au lieu de montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ on aurait aussi pu travailler sur les dimensions des espaces et montrer que :*

$$\dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right) + \dim\left(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\right).$$

Il est toutefois très important de retenir la méthode utilisée dans l'application.

Théorème 4.4. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors on a :*

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

Remarque 4.5. *Ce théorème est faux en dimension infinie. On peut (exercice délicat) exhiber des sous-espaces vectoriels de dimension infini, tels que $F^{\perp} = \{0\}$ et $F \neq E$.*

Corollaire 4.6. *Si E est un espace euclidien (préhilbertien de dimension finie) et si F est un sous-espace vectoriel de E alors on a*

$$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$$

Corollaire 4.7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors on a :*

$$F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Preuve :

4.2 Projection orthogonale

Définition 4.8. *Soit $(E, \langle . \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.*
Comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$, pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un unique vecteur $\vec{y} \in F$ et un unique vecteur $\vec{z} \in F^{\perp}$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
*Le vecteur $\vec{y}$ s'appelle le **projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F**.*
*L'application p_F qui à tout vecteur $\vec{x}$ de E associe son projeté orthogonal sur F s'appelle la **projection orthogonale sur F**.*

Application 4.9. *On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la projection orthogonale sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 4.10. *Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E et $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $\vec{x} \in E$ on a :*

$$p_F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \, \vec{\varepsilon}_i$$

Application 4.11. *On reprend $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z - t = 0\right\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ étudié dans une application précédente. Déterminer la matrice associée à la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.*

Proposition 4.12. *Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F. On a :*

- $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} \in F \Longleftrightarrow p_F(\vec{x}) = \vec{x}$
- $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) \in F$ *et* $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^\perp$
- $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = p_F(\vec{x}) + p_{F^\perp}(\vec{x})$
- p_F *est un projecteur de* E.

Remarque 4.13. *Le troisième point de cette propriété peut vous permettre d'être astucieux si vous remarquez qu'il est plus facile de trouver $p_{F^\perp}$. Vous pourrez ensuite en déduire p_F.*

Preuve :

- Si $\vec{x} \in F$ alors l'unique décomposition de $\vec{x}$ sur F et $F^\perp$ est :

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{x}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F^\perp}$$

donc d'après la définition de p_F on a bien $p_F(\vec{x}) = \vec{x}$.
La réciproque est vraie pas définition de la projection sur F.

- En reprenant les notations de la définition :

$$p_F(\vec{x}) = \vec{y} \in F \text{ et } \vec{x} - p_F(\vec{x}) = \vec{z} \in F^{\perp}.$$

- Application directe de la définition de nouveau.
- 1. Montrons que p_F est un endomorphisme de E. p_F est bien une application de E dans E.
  De plus, soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $\vec{x}_1 = \vec{y}_1 + \vec{z}_1$ la décomposition de $\vec{x}_1$ sur F et $F^{\perp}$ et $\vec{x}_2 = \vec{y}_2 + \vec{z}_2$ la décomposition de $\vec{x}_2$ sur F et $F^{\perp}$.
  On a alors $a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 = a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2 + a\vec{z}_1 + b\vec{z}_2$.
  Donc $p_F\left(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2\right) = a\vec{y}_1 + b\vec{y}_2 = ap_F\left(\vec{x}_1\right) + bp_F\left(\vec{x}_2\right) \cdot p_F$ est donc bien linéaire.
  2. Il faut maintenant vérifier que $p_F \circ p_F = p_F$.
  Pour tout $\vec{x} \in E$, on a vu que $p_F(\vec{x}) \in F$ donc $p_F\left(p_F(\vec{x})\right) = p_F(\vec{x})$ et ainsi p_F est bien un projecteur.

Application 4.14. *On reprend* $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z - t = 0\right\}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*.*
Retrouver l'expression de $p_F(x, y, z, t)$ ***sans utiliser une base orthonormée de*** F*.*

Méthode 4.15. *Pour déterminer la projection orthogonale sur un sous-espace F nous disposons de trois méthodes :*

1. *avec la définition : on écrit $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in F^{\perp}$ et on a alors $p_F(\vec{x}) = \vec{y}$;*
2. *avec une base orthonormée de* ***F*** : $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ *base orthonormée de F, on écrit alors* $p_F(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \, \vec{\varepsilon}_i$

3. *avec une base de* $\boldsymbol{F}$ *: on exploite trois informations :* $p_F(\vec{x}) \in E, p_F(\vec{x}) \in F$ *et* $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^{\perp}$ *(on traduit le plus souvent ce dernier point en disant que* $\vec{x} - p_F(\vec{x})$ *est orthogonal aux vecteurs de la base de* F*) .*

Il ne faut pas oublier qu'il est parfois plus simple de déterminer $p_{F^{\perp}}(\vec{x})$ *(avec l'une des trois méthodes ci-dessus), puis on obtient* $p_F(\vec{x})$ *par la relation :*

$$p_F(\vec{x}) = \vec{x} - p_{F^{\perp}}(\vec{x})$$

4.3 Distance d'un point à un sev de dimension finie

Proposition 4.16. *Soit* F *un sev de dimension finie de* E*, et* p_F *la projection orthogonale sur* F*. Alors :*

- *Pour tout vecteur* $x \in E$*, on a* $\forall y \in F, \|x-y\| \geq \|x - p_F(x)\|$*.*
  Donc $\|x - p_F(x)\| = \inf\limits_{y \in F} \|x-y\| = \min\limits_{y \in F} \|x-y\|$*.*
- *Étant donné* $x \in E$*, si un vecteur* $z \in F$ *vérifie :*

  $$\forall y \in F, \|x-y\| \geq \|x-z\|$$

  alors $z = p_F(x)$

Remarque 4.17. *Le projeté orthogonal* $p_F(x)$ *est donc le seul "point" qui minimise la distance de* x *aux "points" du sev* F*.*

Preuve :

Définition 4.18. ***Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie****.*
Étant donné un vecteur $x \in E$ *et un sous-espace* F *de dimension finie, on appelle* ***distance de*** x ***à*** F *le réel positif :*

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x-y\| = \|x - p_F(x)\|$$

Remarque 4.19. *On a* $d(x;F) = 0 \iff x = p_F(x) \iff x \in F$

Application 4.20. *On munit $E = \mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.*

1. *Exprimer la projection orthogonale sur le plan* $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. *Pour tout* $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, *exprimer* $d(\overrightarrow{w}, F)$.
3. *Le vecteur* $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ *appartient-il à* F *?*