
Programme de khôle 14

Semaine du 12 janvier 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentations CCS et CCINP sont autorisées.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. **syst_diff(a,b)** qui reçoit en argument deux flottants et qui trace la courbe approchée des points $(x(t); y(t))$ solutions du système :

$$(S_1) : \begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}.$$

sur $[0; 4]$ avec $(x(0); y(0)) = (a; b)$

2. **equa_diff1(a)** qui trace la solution approchée de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' + \sqrt{t} \cdot y = 0 \\ y(0) = a \end{cases} \text{ sur } [0; 4].$$

3. **equa_diff2(a)** qui trace la solution approchée de l'équation différentielle

$$y'' - 2ay' + y = e^x$$

sur $[0; 3]$ avec $(y(0); y'(0)) = (0; 1)$.

2 Pratique calculatoire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $[a, b]$.
3. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$ sur $E = \mathbb{R}^2$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *On considère l'équation différentielle*

$$(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0.$$

1. *Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ en posant $u = x^2y$.*
2. *Existe-t-il des solutions de (E) définies sur \mathbb{R} ?*

Exercice 3.2. *On souhaite résoudre (H) : $(t+1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = 0$ sur $I =]-1; +\infty[$.*

1. *Vérifier que $t \mapsto e^t$ est solution.*
2. *Chercher les solutions de (H) sous la forme $x(t) = e^tu(t)$, où u est une fonction deux fois dérivable.*

Exercice 3.3. *Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle :*

$$(E) : y'' - 2ay' + y = e^x$$

suivant les valeurs du réel a .

Chap.10 : Équations différentielles scalaires

- 1 Généralités sur les équations différentielles linéaires
- 2 E.D. scalaires linéaires d'ordre 1

- 3 E.D. scalaires linéaires d'ordre 2

Chap.11 : Espaces préhilbertiens réels

- 1 Généralités sur les espaces préhilbertiens
 - 1.1 Produit scalaire
 - 1.2 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n
 - 1.3 Norme euclidienne
 - 1.4 Distance euclidienne

- 2 Orthogonalité
 - 2.1 Vecteurs orthogonaux
 - 2.2 Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel
 - 2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux