# Méthodes
# Chap.1 et 2 : Algèbre linéaire

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

## 1 Comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

### 1.1 Méthode 1 : revenir à la définition

1. vérifier que $F \subset E$
2. $F$ est non vide, généralement en montrant que $0_E \in F$.
3. $F$ est stable par combinaison linéaire, i.e.

$$\forall (u,v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda u + v \in F$$

**Exemple 1.1.** *Montrer que*

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\}$$

*est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$.

1. *On a évidemment* $F \subset \mathbb{R}[X]$.
2. *Notons* $0_{\mathbb{R}[X]}$ *le polynôme nul. On a* $0'_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ *et en particulier* $0'_{\mathbb{R}[X]}(1) = 0$ *donc* $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
3. *Soient* $P, Q \in F$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$(\lambda P + \mu Q)'(1) = (\lambda P' + \mu Q')(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1)$$

*Or* $P'(1) = 0$ *car* $P \in F$ *et* $Q'(1) = 0$ *car* $Q \in F$.
*Ainsi* $(\lambda P + \mu Q)'(1) = 0$ *, i.e.* $\lambda P + \mu Q \in F$.

*On a ainsi montré que* $F$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$.

### 1.2 Méthode 2 : écrire l'ensemble comme un Vect

Cette méthode est souvent utile lorsqu'on demande ensuite une base ou la dimension du sous-espace vectoriel en question.

**Exemple 1.2.** *Montrer que*

$$G = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M \text{ triangulaire supérieure }\}$$

*est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- *Les éléments de $G$ sont bien des éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*
- *Une matrice $M \in G$ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b$ et $c$ trois réels.*
  *Comme*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$$

  *on a $G = \mathrm{Vect}\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ et en particulier $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

## 2 Comment montrer qu'une famille est libre ?

Par définition, une famille $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'éléments de $E$ est libre lorsque

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

**Exemple 2.1.** *Montrer que la famille $\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ est libre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.*

*Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda E_{11} + \mu E_{12} + \nu E_{22} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.*
*On a donc :*

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i.e. \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*D'où $\lambda = \mu = \nu = 0$.*
*On a donc montré que la famille ( $E_{11}, E_{12}, E_{22}$ ) est libre.*

Dans le cas particulier d'un ensemble de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, il peut-être utile d'utiliser la méthode du pivot de Gauss sur la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs.
Si le nombre de pivots non nuls est égal au nombre de vecteurs, alors cette famille est libre.

**Exemple 2.2.** *Montrer que la famille $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.*

*En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$*,*
*on obtient (faire les calculs) trois pivots non nuls.*
*Comme* $\mathscr{F}$ *est composée de trois vecteurs, on en déduit que cette famille est libre.*

# 3 Comment montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel ?

On commence toujours par vérifier/remarquer que les éléments de la famille appartiennent à l'espace vectoriel.

## 3.1 Méthode 1

Si on ne connaît pas la dimension, en montrant qu'elle est libre et génératrice
Le caractère générateur provient toujours de l'écriture sous forme de Vect.

**Exemple 3.1.** *Déterminer une base de* $G$ *défini dans l'exemple 2.*
*On a montré précédemment que* $G = \mathrm{Vect}\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$*. Autrement dit, la famille* $(E_{11}, E_{12}, E_{22})$ *est génératrice de* $G$*.*
*De plus, on a montré dans l'exemple 3 que cette famille est libre.*
*Ainsi* $(E_{11}, E_{12}, E_{22})$ *est une base de* $G$*.*

## 3.2 Méthode 2

Si on connaît la dimension, en montrant qu'elle est libre et contient le bon nombre d'éléments.

**Exemple 3.2.** *Montrer que la famille* $\mathscr{F}$ *de l'exemple 4 est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*
*On a montré dans cet exemple que la famille* $\mathscr{F}$ *est libre.*
*De plus, elle contient trois vecteurs et* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *donc* $\mathscr{F}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$*.*

# 4 Comment montrer qu'une application est un endomorphisme ?

On considère une application $\varphi$ définie sur $E$. Pour montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$, il y a deux points à montrer :

1. $\varphi$ est à valeurs dans $E$, i.e. $\forall u \in E, \varphi(u) \in E$.
2. $\varphi$ est linéaire, i.e.

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$$

**Exemple 4.1.** *Montrer que* $\psi : P \mapsto XP(X+1) - (X+1)P(X)$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$*.*

1. *Valeurs : Soit* $P \in \mathbb{R}_2[X]$*. On écrit* $P = aX^2 + bX + c$ *avec* $a, b$ *et* $c$ *trois réels. On a alors :*

$$\begin{aligned}\psi(P) &= X\left[a(X+1)^2 + b(X+1) + c\right] - (X+1)\left(aX^2 + bX + c\right)\\ &= aX^2 + aX - c \in \mathbb{R}_2[X]\end{aligned}$$

2. *Linéarité : Soient* $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. On a :*

$$\begin{aligned}\psi(\lambda P + \mu Q) =& X(\lambda P + \mu Q)(X+1) - (X+1)(\lambda P + \mu Q)(X)\\ =& \lambda XP(X+1) + \mu XQ(X+1)\\ & \quad - \lambda(X+1)P(X) - \mu(X+1)Q(X)\\ =& \lambda[XP(X+1) - (X+1)P(X)]\\ & \quad + \mu[XQ(X+1) - (X+1)Q(X)]\\ =& \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q)\end{aligned}$$

*On a donc montré que* $\psi$ *est linéaire.*

*D'après les points 1 et 2 , on a montré que* $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$*.*

# 5 Comment écrire la matrice d'un endomorphisme ?

L'écriture de la matrice d'un endomorphisme se fait toujours dans une base donnée. Cette matrice a pour colonnes les coordonnées dans cette base des images de chaque élément de la base. Autrement dit, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$ et $\varphi$ un endomorphisme de $E$, la matrice de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \cdots & \varphi(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

**Exemple 5.1.** *Écrire la matrice de l'endomorphisme* $\psi$ *défini dans l'exemple 4.1 dans la base canonique* $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$*.*

*On a facilement :*

$\psi(1) = -1$, $\psi(X) = 0$ *et :*

$\psi(X^2) = X(X+1)^2 - (X+1)X^2 = X^2 + X$ *D'où :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$