Méthodes
Chap.10 : résolution d'un système différentiel

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre le système différentiel

$$(S) : X' = AX$$

1. On réduit la matrice A (si nécessaire sur $\mathbb{C}$ si les valeurs propres ne sont pas réelles).
   On détermine ainsi $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale ou triangulaire supérieure telles que :
   $$A = PTP^{-1}.$$
2. On remplace dans le système (refaire ce calcul à chaque fois) :
   $$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PTP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \\ &\iff Y' = TY \end{aligned}$$
   où $Y = P^{-1}X$.
3. On résout le système différentiel $Y' = TY$ d'inconnue Y (il s'agit d'équations différentielles linéaires d'ordre 1).
4. On revient aux solutions de (S) en écrivant $X = PY$.
5. Si on a les solutions complexes alors que l'on veut les solutions réelles, on remplace les éléments conjugués d'une base de solutions par leurs parties réelle et imaginaire.

Remarque : Cette méthode ne nécessite pas de calculer P^{-1}.

Exemple 0.1. *Résoudre le système différentiel* $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Ce système équivaut à $(S) : X' = AX$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $X = \binom{x}{y}$.

1. *En réduisant la matrice A, on obtient :*

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *En posant $Y = P^{-1}X$, il vient que Y est solution du système différentiel*

$$Y' = DY \iff \begin{cases} u' = 2u \\ v' = 3v \end{cases} \quad \text{où on a posé } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

3. *Il s'agit alors de deux équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1.*
On a donc :

$$u(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} \text{ et } v(t) = \mu \mathrm{e}^{3t}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, i.e. $Y(t) = \binom{\lambda \mathrm{e}^{2t}}{\mu \mathrm{e}^{3t}}$.

4. *En revenant à X via $X = PY$, on obtient les solutions de (S) :*

$$X(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{2t} + 2\mu \mathrm{e}^{3t} \\ \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

qui, par définition de X, peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} + 2\mu \mathrm{e}^{3t} \\ y(t) = \lambda \mathrm{e}^{2t} + \mu \mathrm{e}^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exemple 0.2. *Résoudre le système différentiel* $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 10x - y \end{cases}$.

Ce système équivaut à $(S) : X' = BX$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \binom{x}{y}$.

1. *En réduisant la matrice B sur $\mathbb{C}$, on trouve*

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1+4\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-4\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-2\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

2. *En posant $Y = P^{-1}X$, il vient que Y est solution du système différentiel*

$$Y' = DY \iff \begin{cases} u' = (1+4\mathrm{i})u \\ v' = (1-4\mathrm{i})v \end{cases} \quad \text{où on a posé } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

3. *On a donc* $\begin{cases} u(t) = \lambda e^{(1+4i)t} & \textit{avec } \lambda \in \mathbb{C}, \\ v(t) = \mu e^{(1-4i)t} & \textit{avec } \mu \in \mathbb{C}, \end{cases}$ *i.e.* $Y(t) = \binom{\lambda e^{(1+4i)t}}{\mu e^{(1-4i)t}}$.
4. *En revenant à X via $X = PY$, on obtient les solutions complexes de (S) :*

$$X(t) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} e^{(1+4i)t} \\ (1-2i)e^{(1+4i)t} \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} e^{(1-4i)t} \\ (1+2i)e^{(1-4i)t} \end{pmatrix}}_{X_2(t)} \quad \textit{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

5. *Le couple (X_1, X_2) est une base des solutions complexes de (S).*
Comme X_1 et X_2 sont conjuguées, pour déterminer une base des solutions réelles, il suffit de les remplacer par leurs parties réelle et imaginaire.
En notant celles-ci X_3 et X_4, on obtient que (X_3, X_4) est une base de solutions réelles de (S).
Ici on pose donc :

$$X_1(t) = \overline{X_2(t)} = \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix}}_{X_3(t)} + i\, \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix}}_{X_4(t)}$$

Autrement dit, les solutions réelles de (S) sont :

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha X_3(t) + \beta X_4(t) \\ &= \alpha e^t \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = e^t(\alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t)) \\ y(t) = e^t(\alpha[\cos(2t) + 2\sin(4t)] + \beta[\sin(2t) - 2\cos(4t)]) \end{cases} \quad \textit{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exemple 0.3. *Résoudre le système différentiel* $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$.

Ce système équivaut à $X' = CX$ avec :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \textit{ et } X = \binom{x}{y}.$$

1. *La matrice* C *n'est pas diagonalisable mais elle trigonalisable sur* $\mathbb{R}$. *Grâce à une indication fournie dans l'énoncé, on montre que :*

$$C = PTP^{-1} \quad \text{avec } T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *En posant* $Y = P^{-1}X$, *il vient que* Y *est solution du système différentiel :*

$$Y' = TY \iff \begin{cases} u' = 2u + v \\ v' = 2v \end{cases} \quad \text{où on a posé } Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

3. *Avec la seconde équation, on a directement :*

$$v(t) = \mu \mathrm{e}^{2t} \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

Alors u *est solution de l'équation différentielle linéaire* $u' - 2u = \mu\mathrm{e}^{2t}$ *qui comporte un second membre.*
On résout l'équation homogène associée puis on détermine une solution particulière via la méthode de variations de la constante.
On obtient ainsi :

$$u(t) = (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{2t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement $Y(t) = \left(\begin{smallmatrix} (\lambda+\mu t)\mathrm{e}^{2t} \\ \mu\mathrm{e}^{2t} \end{smallmatrix}\right)$.

4. *En revenant à* X *via* $X = PY$, *on obtient les solutions de* (S) *:*

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{2t} + \mu\mathrm{e}^{2t} \\ 2(\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{2t} - \mu\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2\lambda + \mu(2t+1)]\mathrm{e}^{2t} \\ [2\lambda + \mu(2t-1)]\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Autrement dit :

$$\left(\begin{smallmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} \end{smallmatrix}\right) \text{ et } \left(\begin{smallmatrix} (2t+1)\mathrm{e}^{2t} \\ (2t-1)\mathrm{e}^{2t} \end{smallmatrix}\right)$$

forment une base de solutions de (S).
On peut aussi écrire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda\mathrm{e}^{2t} + \mu(2t+1)\mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = 2\lambda\mathrm{e}^{2t} + \mu(2t-1)\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \quad textavec\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$