

## Méthodes

# Chap.10 : résoudre une équation différentielle d'ordre 2

### 1 Coefficients constants

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(t),$$

où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels (i.e. des constantes qui ne dépendent pas de la variable  $t$ ) et  $d$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

Dans ce cas, on procède<sup>1</sup> comme pour les équations différentielles d'ordre 1 en deux étapes :

1. on résout l'équation homogène associée  $(H) : ay'' + by' + c = 0$  ;
2. on détermine une solution particulière  $y_P$  de  $(E)$ .

#### 1.1 Équation homogène associée

Pour résoudre l'équation homogène

$$(H) : ay'' + by' + c = 0$$

on considère l'équation caractéristique

$$(EC) : ar^2 + br + c = 0$$

et on distingue plusieurs cas suivant la valeur du discriminant :

- Si  $\Delta > 0$ , en notant  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines réelles de  $(EC)$ , les solutions de  $(H)$  sont de la forme :

$$y_H(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\Delta = 0$ , en notant  $r_0$  la racine double de  $(EC)$ , les solutions de  $(H)$  sont de la forme :

$$y_H(t) = (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\Delta < 0$ , en notant  $r_1$  et  $r_2$  les deux solutions complexes conjuguées de  $(EC)$ , les solutions complexes de  $(H)$  sont de la forme

$$y_H(t) = A e^{r_1 t} + B t e^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

**Exemple 1.1.** Résoudre  $(H_1) : y'' - 4y' + 3y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $r^2 - 4r + 3 = 0$ , le discriminant vaut  $\Delta = 4 > 0$ . Les racines sont 1 et 3 donc les solutions de  $(H_1)$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 1.2.** Résoudre  $(H_2) : y'' + y' + y = 0$ .

L'équation caractéristique est  $r^2 + r + 1 = 0$  de discriminant  $\Delta = -3 < 0$ . Les racines sont  $r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$  et  $r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ . Pour déterminer les solutions réelles, écrivons  $r_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Les solutions de  $(H_2)$  sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{-t/2} \left( \lambda \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \mu \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## 1.2 Recherche d'une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière de  $(E)$ , on regarde le second membre :

- s'il est constant, on cherche une solution particulière constante ;
- si c'est un polynôme, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de même degré ;
- s'il est sous forme d'un sin ou d'un cos, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de sin et cos (méthode identique à celle pour l'ordre 1, voir fiche correspondante) ;
- s'il est de la forme  $d(t) = \gamma e^{\delta t}$ , suivant si  $\delta$  n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme  $ke^{\delta t}$ ,  $kte^{\delta t}$  ou  $kt^2e^{\delta t}$ .

**Exemple 1.3.** Solution particulière de  $(E_2) : y'' + 3y' + 5y = 2$

Comme le second membre est constant, on cherche une solution particulière sous la forme  $y_P(t) = k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Cette fonction est deux fois dérivable et ses dérivées sont nulles d'où, en injectant dans  $(E_2)$ ,  $5k = 2$ .

Ainsi la fonction constante égale à  $\frac{2}{5}$  est solution particulière de  $(E_2)$ .

**Exemple 1.4.** Solution particulière de  $(E_1) : y'' + y' + y = 8e^{3t}$

D'après l'exemple 1.1, 3 est racine simple de l'équation caractéristique associée donc on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_P(t) = kte^{3t}.$$

Cette fonction est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions qui le sont.

On dérive deux fois en tant que produit et on injecte dans  $(E_1)$ .

Après calculs et simplifications, il vient  $2ke^{3t} = 8e^{3t}$  d'où  $k = 4$ .

Ainsi la fonction

$$t \mapsto 4te^{3t}$$

est solution particulière de  $(E_1)$ .

### 1.3 Solutions générales et problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, les solutions générales sont de la forme "solutions homogènes + solution particulière".

**Exemple 1.5.** Résoudre l'équation  $(E_1)$  :  $y'' + y' + y = 8e^{3t}$ .

On a déterminé les solutions homogènes dans l'exemple 1.1 et une solution particulière dans l'exemple 1.4, d'où :

$$S = \left\{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t} + 4te^{3t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Enfin, si on dispose de deux conditions initiales  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = y_1$ , on détermine les valeurs des constantes  $\lambda$  et  $\mu$  et on obtient ainsi une unique solution au problème de Cauchy.

## 2 Coefficients variables

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t),$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des fonctions continues sur l'intervalle  $I$ , avec  $a$  qui ne s'y annule pas.

La principale chose à retenir est qu'il n'existe aucune méthode générale pour résoudre ce genre d'équation différentielle !

Il est donc important de suivre l'énoncé et s'y adapter : recherche de solutions sous une forme donnée, vérification que telle fonction est solution, etc...

**Exemple 2.1.** Montrer que la fonction  $h$  définie par  $h(t) = t^2$  est solution de  $(H_3)$  :  $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

La fonction  $h$  est polynomiale donc deux fois dérivable sur  $I$  avec

$$h'(t) = 2t \text{ et } h''(t) = 2.$$

Ainsi :

$$t^2 h''(t) - 3t h'(t) + 4h(t) = 2t^2 - 6t^2 + 4t^2 = 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

Donc  $h$  est solution de l'équation homogène  $(H_3)$  sur  $I$ .

## 2.1 Abaissement de l'ordre

La seule méthode un tant soit peu générale est celle de l'**abaissement de l'ordre** qui nécessite de connaître préalablement une solution  $h$  de l'équation homogène associée, avec  $h$  qui ne s'annule pas sur  $I$ .

Elle consiste à chercher les solutions sous la forme  $y(t) = z(t)h(t)$  où  $z$  est une fonction inconnue deux fois dérivable sur  $I$ .

Pour cela :

1. on dérive deux fois  $y$  comme produit (après avoir justifié la dérivabilité) ;
2. on injecte dans  $(E)$  et on simplifie au maximum : les termes en  $z$  se simplifient et on aboutit à  $z'$  solution d'une équation différentielle d'ordre 1 ;
3. on résout cette équation différentielle d'ordre 1 ;
4. on a donc  $z'$ , on primitive (sans oublier la constante) pour obtenir  $z$  et on a enfin  $y$  en multipliant par  $h$ .

**Exemple 2.2.** Résoudre  $(E_3) : t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^3$  sur  $I = ]0; +\infty[$

1. On a montré dans l'exemple 2.1 que la fonction  $h$  donnée par  $h(t) = t^2$  est solution de l'équation homogène associée.

On cherche donc les solutions de  $(E_3)$  sous la forme :

$$y(t) = z(t)h(t) = t^2 z(t)$$

avec  $z$  deux fois dérivable sur  $I$ .

En tant que produit de fonctions dérivables sur  $I$ ,  $y$  l'est également. On calcule  $y'$  et  $y''$  (dérivées de produits), on injecte dans  $(E_3)$  et on simplifie.

On obtient  $t^4 z'' + t^3 z' = t^3$ .

Comme  $t^3 \neq 0$  sur  $I$ , ceci équivaut à  $z'' + \frac{1}{t} z' = \frac{1}{t}$ .

2. Ainsi  $z$  est solution de l'équation différentielle  $u' + \frac{1}{t}u = \frac{1}{t}$ .

Par les méthodes de résolutions usuelles (voir fiche correspondante), on trouve  $z'(t) = \frac{\lambda}{t} + 1$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On primitive :  $z(t) = \lambda \ln(t) + t + \mu$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

3. Finalement, comme on a posé  $y(t) = t^2 z(t)$ , les solutions de  $(E_3)$  sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = \lambda t^2 \ln(t) + t^3 + \mu t^2 \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$