

Méthodes

Chap.10 : résoudre une équation différentielle d'ordre 2

1 Coefficients constants

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(t),$$

où a, b et c sont trois réels (i.e. des constantes qui ne dépendent pas de la variable t) et d une fonction continue sur un intervalle I .

Dans ce cas, on procède¹ comme pour les équations différentielles d'ordre 1 en deux étapes :

1. on résout l'équation homogène associée $(H) : ay'' + by' + c = 0$;
2. on détermine une solution particulière y_P de (E) .

1.1 Équation homogène associée

Pour résoudre l'équation homogène

$$(H) : ay'' + by' + c = 0$$

on considère l'équation caractéristique

$$(EC) : ar^2 + br + c$$

et on distingue plusieurs cas suivant la valeur du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les deux racines réelles de (EC) , les solutions de (H) sont de la forme :

$$y_H(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine double de (EC) , les solutions de (H) sont de la forme :

$$y_H(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $\Delta < 0$, en notant r_1 et r_2 les deux solutions complexes conjuguées de (EC) , les solutions complexes de (H) sont de la forme

$$y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

Exemple 1.1. Résoudre $(H_1) : y'' - 4y' + 3y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = 4 > 0$. Les racines sont 1 et 3 donc les solutions de (H_1) sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.2. Résoudre $(H_2) : y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = -3 < 0$. Les racines sont $r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Pour déterminer les solutions réelles, écrivons $r_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (H_2) sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto e^{-t/2} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

1.2 Recherche d'une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière de (E) , on regarde le second membre :

- s'il est constant, on cherche une solution particulière constante ;
- si c'est un polynôme, on cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de même degré ;
- s'il est sous forme d'un sin ou d'un cos, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de sin et cos (méthode identique à celle pour l'ordre 1, voir fiche correspondante) ;
- s'il est de la forme $d(t) = \gamma e^{\delta t}$, suivant si δ n'est pas racine, est racine simple ou est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $ke^{\delta t}$, $kte^{\delta t}$ ou $kt^2e^{\delta t}$.

Exemple 1.3. Solution particulière de $(E_2) : y'' + 3y' + 5y = 2$

Comme le second membre est constant, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Cette fonction est deux fois dérivable et ses dérivées sont nulles d'où, en injectant dans (E_2) , $5k = 2$.

Ainsi la fonction constante égale à $\frac{2}{5}$ est solution particulière de (E_2) .

Exemple 1.4. Solution particulière de $(E_1) : y'' + y' + y = 8e^{3t}$

D'après l'exemple 1.1, 3 est racine simple de l'équation caractéristique associée donc on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_P(t) = kte^{3t}.$$

Cette fonction est deux fois dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions qui le sont.

On dérive deux fois en tant que produit et on injecte dans (E_1) .

Après calculs et simplifications, il vient $2ke^{3t} = 8e^{3t}$ d'où $k = 4$.

Ainsi la fonction

$$t \mapsto 4te^{3t}$$

est solution particulière de (E_1) .

1.3 Solutions générales et problème de Cauchy

Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, les solutions générales sont de la forme "solutions homogènes + solution particulière ».

Exemple 1.5. Résoudre l'équation $(E_1) : y'' + y' + y = 8e^{3t}$.

On a déterminé les solutions homogènes dans l'exemple 1.1 et une solution particulière dans l'exemple 1.4, d'où :

$$S = \left\{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t} + 4te^{3t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Enfin, si on dispose de deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$, on détermine les valeurs des constantes λ et μ et on obtient ainsi une unique solution au problème de Cauchy.

2 Coefficients variables

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t),$$

où a, b, c et d sont des fonctions continues sur l'intervalle I , avec a qui ne s'y annule pas.

La principale chose à retenir est qu'il n'existe aucune méthode générale pour résoudre ce genre d'équation différentielle !

Il est donc important de suivre l'énoncé et s'y adapter : recherche de solutions sous une forme donnée, vérification que telle fonction est solution, etc...

Exemple 2.1. Montrer que la fonction h définie par $h(t) = t^2$ est solution de $(H_3) : t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ sur $I =]0; +\infty[$.

La fonction h est polynomiale donc deux fois dérivable sur I avec

$$h'(t) = 2t \text{ et } h''(t) = 2.$$

Ainsi :

$$t^2 h''(t) - 3th'(t) + 4h(t) = 2t^2 - 6t^2 + 4t^2 = 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

Donc h est solution de l'équation homogène (H_3) sur I .

2.1 Abaissement de l'ordre

La seule méthode un tant soit peu générale est celle de l'**abaissement de l'ordre** qui nécessite de connaître préalablement une solution h de l'équation homogène associée, avec h qui ne s'annule pas sur I .

Elle consiste à chercher les solutions sous la forme $y(t) = z(t)h(t)$ où z est une fonction inconnue deux fois dérivable sur I .

Pour cela :

1. on dérive deux fois y comme produit (après avoir justifié la dérivabilité) ;
2. on injecte dans (E) et on simplifie au maximum : les termes en z se simplifient et on aboutit à z' solution d'une équation différentielle d'ordre 1 ;
3. on résout cette équation différentielle d'ordre 1 ;
4. on a donc z' , on primitive (sans oublier la constante) pour obtenir z et on a enfin y en multipliant par h .

Exemple 2.2. Résoudre $(E_3) : t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^3$ sur $I =]0; +\infty[$

1. On a montré dans l'exemple 2.1 que la fonction h donnée par $h(t) = t^2$ est solution de l'équation homogène associée.

On cherche donc les solutions de (E_3) sous la forme :

$$y(t) = z(t)h(t) = t^2 z(t)$$

avec z deux fois dérivable sur I .

En tant que produit de fonctions dérivables sur I , y l'est également. On calcule y' et y'' (dérivées de produits), on injecte dans (E_3) et on simplifie.

On obtient $t^4 z'' + t^3 z' = t^3$.

Comme $t^3 \neq 0$ sur I , ceci équivaut à $z'' + \frac{1}{t} z' = \frac{1}{t}$.

2. Ainsi z est solution de l'équation différentielle $u' + \frac{1}{t}u = \frac{1}{t}$.

Par les méthodes de résolutions usuelles (voir fiche correspondante), on trouve $z'(t) = \frac{\lambda}{t} + 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On primitive : $z(t) = \lambda \ln(t) + t + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Finalement, comme on a posé $y(t) = t^2 z(t)$, les solutions de (E_3) sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = \lambda t^2 \ln(t) + t^3 + \mu t^2 \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$