Méthodes
Chap.10 : résoudre une équation différentielle d'ordre 1

Méthode générale :

On souhaite résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
On procède en deux étapes :

1. on résout l'équation homogène associée $(H) : y' + a(t)y = 0$;
2. on cherche une solution particulière y_P de (E).

Remarque : s'il y a un coefficient devant y', on pourra diviser par celui-ci après avoir vérifié qu'il ne s'annule pas sur l'intervalle I de résolution.

1 Solutions de l'équation homogène

Théorème 1.1. ***Solutions de l'équation homogène.***
Notons A une primitive de a sur I. Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

$$y_H(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2. *Résoudre $(H_1) : xy' - y = 0$ sur $I =]0; +\infty[$.*

Sur $I, x \neq 0$ donc (H_1) équivaut à $y' - \frac{1}{x}y = 0$.
Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\ln|x|$. Les solutions de (H_1) sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-(-\ln|x|)} = \lambda \mathrm{e}^{\ln|x|} = \lambda|x| = \lambda x$$

car $x > 0$ sur I avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Dans le cas où a est une constante, une primitive de $t \mapsto a$ est $t \mapsto at$ et on retrouve ainsi le résultat vu en première année.
En effet les solutions de (H) sont dans ce cas les fonctions de la forme :

$$y_H(t) = \lambda \mathrm{e}^{-at}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.3. *Résoudre* $(H_2) : y' + 2y = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Une primitive de $t \mapsto 2$ *est* $t \mapsto 2t$ *donc les solutions de* (H_3) *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions de la forme :*

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Recherche d'une solution particulière

Il existe une méthode universelle pour déterminer une solution particulière : la **«variation de la constante»** .
Pour cela :

1. On cherche y_P sous la forme $y_P(t) = z(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ où z est une fonction dérivable sur I (on a remplacé la constante de la solution homogène par une fonction inconnue z, d'où le nom de la méthode).
2. On injecte y_P dans (E), il y a toujours simplification des termes en z et on arrive à une égalité de la forme $z'(t) = \dots$
3. Il suffit d'intégrer pour obtenir z puis y_P.

Exemple 2.1. *Déterminer une solution particulière de*

$$(E_1) : xy' - y = x$$

sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

D'après l'exemple 1.2 , on va chercher une solution particulière y_P *sous la forme* $y_P(x) = z(x)x$ *où* z *est une fonction dérivable sur* I.
La fonction y_P *est dérivable sur* I *en tant que produit de fonctions dérivables sur* I.
On calcule y'_P *(dérivée d'un produit), on injecte dans* (E_1) *et on simplifie (faire les calculs !) pour obtenir*

$$x^2 z'(x) = x \Leftrightarrow z'(x) = \tfrac{1}{x}.$$

En intégrant, on a $z(x) = \ln|x| = \ln x$ *et on obtient donc une solution particulière* y_P *donnée par :*

$$y_P(x) = x\ln(x)$$

pour tout $x \in I$.

Bien que cette méthode fonctionne théoriquement toujours, il est parfois plus rapide de faire autrement :

- l'énoncé peut avoir proposé une solution particulière ;

- il peut y avoir une solution particulière " évidente » ;
- si le coefficient a est une constante, on peut chercher une solution particulière de la forme du second membre.
  Par exemple, si le second membre contient des fonctions *sin* et/ou *cos*, on cherche une solution particulière comme combinaison linéaire de *sin* et *cos*.

Exemple 2.2. *Déterminer une solution particulière de*

$$(E_2) : y' + 2y = 6 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On remarque que la fonction constante égale à 3 *est solution évidente de* (E_2).

Exemple 2.3. *Vérifier que la fonction arcsin est solution particulière de* $(E_3) : \sqrt{1-x^2}y' + y = 1 + \arcsin x$ *sur* $J =]-1;1[$.

La fonction arcsin est dérivable sur J *et on a :*

$$\forall x \in J, (\arcsin x)' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in J, \sqrt{1-x^2}y' + y = \sqrt{1-x^2} \times \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x = 1 + \arcsin x$$

C'est-à-dire que arcsin est solution particulière de (E_3) *sur* J.

Exemple 2.4. *Déterminer une solution particulière de :*

$$(E_4) : y' + 2y = 5\cos(3t) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Comme les coefficients du membre de gauche sont constants, on va chercher une solution particulière sous la forme $y_P(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$ *avec* α *et* β *des réels à déterminer.*
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$y_P'(t) = -3\alpha\sin(3t) + 3\beta\cos(3t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En injectant dans (E_4) *et après regroupement des termes, on obtient l'égalité :*

$$(2\alpha + 3\beta)\cos(3t) + (2\beta - 3\alpha)\sin(3t) = 5\cos(3t).$$

Il faut donc résoudre le système $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ 2\beta - 3\alpha = 0 \end{cases}$.
On obtient $\alpha = \frac{10}{13}$ *et* $\beta = \frac{15}{13}$.
Ainsi, une solution particulière est donnée par :

$$t \mapsto \tfrac{10}{13}\cos(3t) + \tfrac{15}{13}\sin(3t).$$

3 Solutions générales

Théorème 3.1. *Structure des solutions*
Les solutions générales de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme «solution homogène + solution particulière ».
Plus précisément, ce sont les fonctions de la forme :

$$t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + y_P(t) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2. *Résoudre l'équation*

$$(E_1) : xy' - y = x \text{ sur }]0; +\infty[.$$

D'après l'exemple 1.2, on dispose des solutions de l'équation homogène associée et on a déterminé une solution particulière dans l'exemple 2.1, d'où :

$$S = \{x \longmapsto \lambda x + x \ln x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 3.3. *Résoudre l'équation*

$$(E_2) : y' + 2y = 6 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

D'après l'exemple 1.3, on dispose des solutions de l'équation homogène associée et on a déterminé une solution particulière dans l'exemple 2.2 , d'où :

$$S = \left\{ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-2t} + 2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4 Problème de Cauchy

Si en plus de l'équation différentielle on dispose d'une condition initiale de la forme $y(t_0) = y_0$, on peut déterminer la valeur de λ et donc obtenir l'unique solution au problème de Cauchy.

Exemple 4.1. *Résoudre le problème de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{l} xy' - y = x \\ y(1) = 2 \end{array} \right.$.
D'après l'exemple 3.2 , les solutions sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = \lambda x + x \ln x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y(1) = 2$ donne $\lambda \times 1 + 1 \times \ln 1 = 2$, i.e. $\lambda = 2$.
Ainsi l'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \longmapsto 2x + x \ln x.$$