Méthodes
Chap.3 : Intégrales généralisées

1 Comment étudier la convergence d'une intégrale ?

On souhaite déterminer la nature d'une intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, i.e. savoir si cette intégrale est convergente ou divergente.
Pour cela, on essaye d'appliquer les différents critères du cours, de préférence dans cet ordre :

1. On cherche l'intervalle sur lequel f est continue : $[a;b]$, $[a;b[]a;b,]ou]a;b[$.
   a) Si f est continue sur le segment $[a;b]$ alors l'intégrale est convergente.
   b) Si f est continue sur $]a;b[$, on sépare l'intégrale en deux et on mène deux études de convergence sur des intervalles semi-ouverts. $\rightsquigarrow$ ex. 3
2. Grâce au premier point, on est ramené au cas où f est continue sur $[a;b[$ (ou sur $]a;b]$, la méthode est symétrique).
   (a) On cherche à savoir si f est prolongeable par continuité en b, i.e. si f admet une limite finie lorsque x tend vers b. Si tel est le cas, l'intégrale est faussement impropre donc convergente.
   $\rightsquigarrow$ Exemple 1.1
   (b) Quel est le signe de f ? Si f est de signe constant, passer au point suivant. Sinon (changements de signe ou complexes), procéder de même mais en faisant une étude de convergence absolue en considérant $|f|$.
   (c) Si on sait calculer une primitive de f, revenir à la définition d'une intégrale convergente.
   $\rightsquigarrow$ Exemple 1.2
   (d) Déterminer un équivalent simple de f lorsque $x \to b$. (Les DL peuvent être utiles.)
   $\rightsquigarrow$ Exemple 1.3
   (e) Utiliser une comparaison, i.e. majorer f au voisinage de b par une fonction dont l'intégrale est convergente ou minorer f au voisinage de b par une fonction dont l'intégrale est divergente.
   $\rightsquigarrow$ Exemple 1.3
   (f) Comparer à une intégrale de Riemann en calculant $\lim_{x\to b} x^\alpha f(x)$ avec α bien choisi.
   $\rightsquigarrow$ Exemple 1.4
   (g) Utiliser un changement de variable ou une intégration par parties ($\rightsquigarrow$ Exemple 2.2 & Exemple 2.3)

3. Dans le cas où l'on a séparé l'intégrale en deux, on conclut (par définition, il y a convergence sur $]a;b[$ si et seulement s'il y a convergence sur $]a;c]$ et sur $[c;b[$).

Exemple 1.1. *Nature de* $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \frac{\arctan x}{x}$ *est continue sur* $]0;1]$.
De plus, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, *i.e.* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
L'intégrale I est ainsi faussement impropre en 0 donc convergente.

Exemple 1.2. *Nature de* $J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.
La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} \frac{1}{\cos^2(x)}$ *est continue sur* $[0;\pi/2[$.
On connaît une primitive de g.
On pose $X \in [0;\pi/2[$ et on a :

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = [\tan x]_0^X = \tan(X) - 0 \underset{X\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}{\longrightarrow} +\infty$$

donc l'intégrale J est divergente.

Exemple 1.3. *Nature de* $K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t \overset{h}{\longmapsto} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ *est continue sur* $]0;+\infty[$. *On va donc étudier la nature des deux intégrales :*

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad K_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

(On a choisi de couper en $1 \in]0;+\infty[$ *mais toute autre valeur de* $]0;+\infty[$ *conviendrait également.)*

1. *On a* $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$.
   Comme $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ *est une intégrale de Riemann convergente en 0 , par équivalence l'intégrale K_1 est convergente en 0 .*
2. *Pour tout* $t \geqslant 1$, *on a* $0 \leqslant h(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente en* $+\infty$ *(cours), par comparaison de fonctions positives, l'intégrale K_2 est convergente en* $+\infty$.
   Bilan : *comme les deux intégrales K_1 et K_2 sont convergentes, on peut conclure que K est convergente.*

Remarque : *Si l'une des deux intégrales K_1 ou K_2 avait été divergente, l'étude de la seconde aurait été inutile : automatiquement K aurait été divergente.*

Exemple 1.4. *Nature de* $L = \int_0^1 (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t$.

La fonction $t \overset{i}{\longmapsto} (\ln t)^2$ *est continue sur* $]0;1]$.
Comme par croissances comparées $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{1/2}(\ln t)^2 = 0$, *on a* $i(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$.
Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}}$ *est une intégrale de Riemann convergente en 0 , par comparaison, on en déduit que* L *est convergente.*

2 Comment calculer la valeur d'une intégrale ?

On considère une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ dont on a montré la convergence et on cherche à calculer sa valeur.
Pour cela, il existe principalement trois méthodes :

- le calcul direct dans le cas où l'on connaît une primitive de f ; $\rightsquigarrow$ Exemple 2.1
- l'intégration par parties ;
- l'utilisation d'un changement de variable.

Remarquons que ces trois méthodes permettent aussi de conclure quant à la nature d'une intégrale ; il n'est donc pas toujours nécessaire de démontrer la convergence avant de procéder au calcul.
Cependant il faut alors être prudent : **on ne fait pas de calcul avec une intégrale dont on n'a pas prouvé la convergence**, on se ramène donc à l'intégrale sur un segment puis on passe à la limite).

Exemple 2.1. *Convergence et valeur de* $M = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
La fonction $x \overset{j}{\longmapsto} \frac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $[0;+\infty[$ *et on en connaît une primitive.*
Soit $X > 0$. *On a :*

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^X = \arctan X - 0 \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Comme la valeur est finie on en déduit que l'intégrale M *est convergente (en* $+\infty$ *) et que* $M = \frac{\pi}{2}$.

Remarque : *On pouvait montrer facilement la convergence grâce à un équivalent en* $+\infty$. *En revanche l'équivalent ne donne aucune information sur la valeur.*

Exemple 2.2. *Convergence et valeur de* $N = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.
La fonction $t \overset{k}{\longmapsto} t\mathrm{e}^{-t}$ *est continue sur* $[0;+\infty[$.

On va procéder par intégration par parties sur le segment $[0;a]$ *avec* $a > 0$ *puis passer à la limite lorsque* a *tend vers* $+\infty$.

Soit $a > 0$: Les fonctions $t \longmapsto t$ et $t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; a]$ d'où :

$\int_0^a t\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \overset{IPP}{=} \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a + \int_0^a \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = -a\mathrm{e}^{-a} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^a = -a\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-a} + 1$

Lorsque a tend vers $+\infty$ cette quantité tend vers 1 (croissances comparées pour le premier terme) donc l'intégrale N est convergente et $N = 1$.

Remarque : *Dans ce cas, il n'était pas immédiat d'obtenir la convergence sans procéder à une intégration par parties (il fallait forcer une comparaison à une intégrale de Riemann), le calcul précédent permet donc à la fois de montrer la convergence de l'intégrale et de calculer sa valeur.*

Exemple 2.3. *Convergence et valeur de $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.*

La fonction $x \overset{\ell}{\longmapsto} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est continue sur $]-\infty; +\infty[$ (le dénominateur est strictement positif comme somme de deux exponentielles).

On pose $u = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x = \ln(u)$ qui est une bijection croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0; +\infty[$ dans $]-\infty; +\infty[$. Par changement de variable, l'intégrale P est de même nature que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u + 1/u} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$$

Or, d'après l'exemple 2.1 , cette dernière intégrale est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, l'intégrale P est convergente et $P = \frac{\pi}{2}$.