Chap.6 : Réduction
Méthodes

1 Méthode de diagonalisation

On souhaite savoir si une matrice M de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

1. On calcule le polynôme caractéristique de M.
   - Si χ_M n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors la matrice M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
   - Si χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de M et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_p}$ leurs multiplicités respectives.
2. S'il y a n valeurs propres distinctes alors on peut tout de suite conclure que M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
3. On détermine, pour chaque valeur propre λ_k, une base $\mathscr{B}_k$ du sous-espace propre E_{λ_k}.
   - Si pour au moins une valeur propre λ_k de M on a $\dim(E_{\lambda_k}) < m_{\lambda_k}$, alors la matrice M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
   - Si pour toutes les valeurs propres de M on a
   $$\dim(E_{\lambda_k}) = m_{\lambda_k}$$
   alors la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
4. Dans le cas où M est diagonalisable, on note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$ la concaténation des bases $\mathscr{B}_i$; c'est une base de $\mathbb{K}^n$.
   On note P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathscr{B}$, i.e. la matrice dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base canonique.
   On a alors :
   $$M = PDP^{-1}$$
   où $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale
   $$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1} \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2} \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p} \text{ fois}}).$$

Exemple 1.1. *Diagonaliser* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sur* $\mathbb{R}$.

1. *Son polynôme caractéristique est :*

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

2. *Le polynôme* χ_A *n'est pas scindé sur* $\mathbb{R}$ *car ses racines ne sont pas dans* $\mathbb{R}$.
3. *On en déduit que* A *n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2. *Diagonaliser* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sur* $\mathbb{C}$.

1. *Son polynôme caractéristique est* $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$. *Il est scindé sur* $\mathbb{C}$ *et on a* $\mathrm{Sp}(A) = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ *avec* $m_{-\mathrm{i}} = m_{\mathrm{i}} = 1$.
2. *On a deux valeurs propres distinctes et* A *est de taille 2 donc* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$.
3. *On détermine une base de chaque sous-espace propre :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\mathrm{i}} \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y = \mathrm{i}x \\ x = \mathrm{i}y \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\mathrm{i}x \\ x = x \end{array} \right.$$

Ainsi $E_{\mathrm{i}} = \mathrm{Vect}\left\{\binom{1}{-\mathrm{i}}\right\}$. *De même, on trouve* $E_{-\mathrm{i}} = \mathrm{Vect}\left\{\binom{1}{\mathrm{i}}\right\}$.

4. *On a ainsi* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Remarque : *On constate que les vecteurs propres associés à i et -i sont conjugués.*
C'est un fait général pour une matrice à coefficients réels.
En effet, si $AX = \lambda X$ *avec* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *alors :*

$$A\bar{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\bar{X}.$$

Exemple 1.3. *Diagonaliser* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Son polynôme caractéristique est :*

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - B) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

Il est scindé sur $\mathbb{R}$ *et on a* $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$ *avec* $m_2 = 2$.

2. *Comme il n'y a qu'une valeur propre (de multiplicité 2), on ne peut pas tout de suite conclure quant à la diagonalisabilité ou non de* B.

3. *On détermine une base de l'espace propre :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=2x \\ 2y=2y \end{array} \right. \iff y=0$$

Ainsi $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\binom{1}{0}\right\}$ *et en particulier* $\dim(E_2) = 1 \neq 2 = m_2$ *donc* B *n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *(ni sur* $\mathbb{C}$*, les calculs sont identiques).*

Exemple 1.4. *Diagonaliser la matrice* $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Grâce à un développement selon la première colonne, on a :*

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 & -3 \\ 0 & \lambda+4 & -6 \\ 0 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} &= (\lambda-2)[(\lambda+4)(\lambda-5)+18] \\ &= (\lambda-2)\left(\lambda^2-\lambda-2\right) \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ *et on a* $\mathrm{Sp}(C) = \{-1; 2\}$ *avec* $m_{-1} = 1$ *et* $m_2 = 2$.

2. *Comme il n'y a que deux valeurs propres distinctes et que* C *est de taille 3, on ne peut pas conclure tout de suite quant à la diagonalisibilité de* C.

3. *On détermine une base du sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \cdots \iff z = y.$$

Ainsi $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ *et en particulier* $\dim(E_2) = 2 = m_2$.
Par conséquent, la matrice C *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*. Remarque : comme* $m_{-1} = 1$*, même sans calcul de l'espace propre associé, on est certain que* $\dim(E_{-1}) = 1 = m_{-1}$*. On doit cependant le calculer pour déterminer la matrice* P.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Longleftrightarrow C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

Ainsi $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. *On a ainsi* $C = PDP^{-1}$ *avec :*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Si une matrice M est diagonalisable, on peut calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Comme précédemment, on détermine une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.
2. On calcule P^{-1}.
3. On remarque que :
   - il est facile de calculer D^k : il s'agit simplement de mettre les termes diagonaux à la puissance k ;
   - d'après le cours $M^k = \left(PDP^{-1}\right)^k = PD^kP^{-1}$.
4. On effectue les produits matriciels ci-dessus et on obtient M^k.

Exemple 2.1. *Déterminer l'expression de C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ où C est la matrice de l'exemple précédent.*

1. *On a* $C = PDP^{-1}$ *avec* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, on trouve* $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $C^k = PD^kP^{-1}$ *avec* $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

4. On effectue les produits matriciels :

$$\begin{aligned}
C^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^k & (-1)^k - 2^k & (-1)^{k+1} + 2^k \\ 0 & 2(-1)^k - 2^k & 2(-1)^{k+1} + 2^{k+1} \\ 0 & (-1)^k - 2^k & (-1)^{k+1} + 2^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$