Méthodes Chap.9 : Séries entières

1 Rappel

Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes **strictement positifs**.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut ℓ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente ;
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure (via cette méthode) concernant la nature de la série $\sum u_n$.

2 Détermination du rayon de convergence d'une série entière via la règle de d'Alembert

On cherche à déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres réels ou complexes en utilisant la règle de d'Alembert des séries numériques.
Pour cela, on procède comme suit :

1. On pose $u_n = |a_n z^n|$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ et les valeurs de n telles que $u_n \neq 0$.
   Attention ! ! ! Le module est indispensable.
2. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en simplifiant le plus possible.
3. On détermine la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'expression précédente.
4. On compare cette limite, qui dépend généralement de $|z|$, avec 1 pour conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$.
   On obtient ainsi le rayon de convergence de la série entière.

Exemple 2.1. *Donner le rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{5^n}{n+1} z^{2n}$.

1. *Pour* $z \in \mathbb{C}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \left|\frac{5^n}{n+1} z^{2n}\right| = \frac{5^n}{n+1}|z|^{2n}$.
2. *On a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}|z|^{2(n+1)}}{n+2} \times \frac{n+1}{5^n|z|^{2n}} = \frac{n+1}{n+2} \times 5|z|^2$$

3. *Grâce au calcul précédent, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 5|z|^2.$$

4. - *Si* $5|z|^2 < 1$ *alors, d'après la règle de d'Alembert, la série* $\sum u_n$ *est convergente. Cela étant valable pour tout* z *tel que* $5|z|^2 < 1$, *i.e.* $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$, *on obtient* $R \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   - *Si* $5|z|^2 > 1$ *alors, d'après la règle de d'Alembert, la série* $\sum u_n$ *est divergente. Cela étant valable pour tout* z *tel que* $5|z|^2 > 1$, *i.e.* $|z| > \frac{1}{\sqrt{5}}$, *on obtient* $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   - *Par double inégalité* $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exemple 2.2. *Rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$.

1. *Pour* $z \in \mathbb{C}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n = \left|\frac{(-1)^n}{n^n} z^n\right| = \frac{|z|^n}{n^n}$.
2. *On a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

3. ***Méthode 1 :*** *On a* $0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{|z|}{n+1}$ car $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant 1$ *pour tout entier naturel* n.
   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$, *par encadrement,* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
   Méthode 2 : *On passe à la forme exponentielle :*

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln \frac{n}{n+1}\right) = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\overset{\text{DL}}{=}} \mathrm{e}^{-1+o(1)}$$

   D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1}\mathrm{e}^{-1+o(1)} = 0 \times \mathrm{e}^{-1} = 0$.

4. *Comme* $0 < 1$, *d'après la règle de d'Alembert, la série* $\sum u_n$ *converge.*

   Comme ceci est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, *on en déduit que :*

$$R = +\infty.$$