

Méthodes Chap.5 : Méthode de d'Alembert

1 Rappel - Règle de d'Alembert des séries numériques

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut ℓ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente ;
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente ;
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure (via cette méthode) concernant la nature de la série $\sum u_n$.

2 Détermination du rayon de convergence d'une série entière via la règle de d'Alembert

On cherche à déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres réels ou complexes en utilisant la règle de d'Alembert des séries numériques.

Pour cela, on procède comme suit :

1. On pose $u_n = |a_n z^n|$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ et les valeurs de n telles que $u_n \neq 0$.
!!! La valeur absolue / le module est indispensable.
2. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en simplifiant au maximum.
3. On détermine la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de l'expression précédente.
4. On compare cette limite, qui dépend généralement de $|z|$, avec 1 pour conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$, on obtient ainsi le rayon de convergence de la série entière.

Exemple 2.1. Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{5^n}{n+1} z^{2n}$.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left| \frac{5^n}{n+1} z^{2n} \right| = \frac{5^n}{n+1} |z|^{2n}$.
2. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1} |z|^{2(n+1)}}{n+2} \times \frac{n+1}{5^n |z|^{2n}} = \frac{n+1}{n+2} \times 5 |z|^2$$

3. Grâce au calcul précédent, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 5|z|^2$.
4. • Si $5|z|^2 < 1$ alors, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente. Cela étant valable pour tout z tel que $5|z|^2 < 1$, i.e. $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$, on obtient $R \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Si $5|z|^2 > 1$ alors, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est divergente. Cela étant valable pour tout z tel que $5|z|^2 > 1$, i.e. $|z| > \frac{1}{\sqrt{5}}$, on obtient :

$$R \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

- Par double inégalité $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Exemple 2.2. Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left| \frac{(-1)^n}{n^n} z^n \right| = \frac{|z|^n}{n^n}$.
2. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

3. **Méthode 1 :** On a $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{|z|}{n+1} \text{ car } \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \leq 1$ pour tout entier naturel n .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

Méthode 2 : On passe à la forme exponentielle :

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \exp \left(n \ln \frac{n}{n+1} \right) = \exp \left(-n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \stackrel{\text{DL}}{\underset{+\infty}{\sim}} e^{-1+o(1)}$$

$$D'où \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{n+1} e^{-1+o(1)} = 0 \times e^{-1} = 0.$$

4. Comme $0 < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. Comme ceci est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en déduit que :

$$R = +\infty.$$