Méthodes
Chap.12 :V.A.R.
Déterminer la loi

Donner la loi d'une variable aléatoire X c'est donner deux informations :

1. l'ensemble des valeurs possibles pour X, on le note $X(\Omega)$;
2. la probabilité de réalisation de chacune de ces valeurs, i.e. la valeur de $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

Pour ce faire, il y a deux cas possibles :

- on reconnaît une loi usuelle et il suffit alors de connaître son cours ;
- ce n'est pas une loi usuelle, on donne alors $X(\Omega)$ en justifiant puis on calcule la valeur de $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ à l'aide des résultats usuels de probabilités, notamment en écrivant l'événement $[X = k]$ comme union et/ou intersection d'événements élémentaires.

Exemple 0.1. *Une loi usuelle On lance dix fois un dé équilibré et on note X le nombre d'apparitions du chiffre 5. Donner la loi de X.*

On reconnaît une situation de ***loi binomiale****.*
En effet, on répète dix fois de façon identique et indépendante la même expérience aléatoire ayant deux issues : obtenir 5 (de probabilité $1/6$ *) ou ne pas obtenir 5 (de proba.* $5/6$ *).*
Ainsi $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$*, i.e.* $X(\Omega) = [\![0; 10]\!] = \{0; 1; 2; \dots; 10\}$ *et :*

$$\forall k \in [\![0; 10]\!], P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\frac{5^{10-k}}{6^{10}}$$

Exemple 0.2. *En explicitant chaque cas*

On lance deux dés équilibrés à trois faces numérotées de 1 à 3 et on note Y le produit des deux nombres obtenus. Donner la loi de Y.

- *Tout d'abord,* $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9\}$ *(on peut faire un tableau à double entrée pour se convaincre).*
- *Afin de calculer la probabilité de réalisation de chacune de ces valeurs, pour* $i \in \{1, 2, 3\}$*, notons* A_i *l'événement «obtenir i sur le premier dé» et* B_i *l'événement «obtenir i sur le second dé».*
  On a $[Y = 1] = A_1 \cap B_1$ *donc :*

$$P(Y=1) = P\left(A_1 \cap B_1\right) = P\left(A_1\right) \times P\left(B_1\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

où la deuxième égalité provient de l'indépendance des événements A_1 et B_1.
De façon analogue :

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= P\left(\left(A_1 \cap B_2\right) \cup \left(A_2 \cap B_1\right)\right) \\ &= P\left(A_1 \cap B_2\right) + P\left(A_2 \cap B_1\right) \qquad \textit{incompatibilité} \\ &= P\left(A_1\right) P\left(B_2\right) + P\left(A_2\right) P\left(B_1\right) \quad \downarrow \textit{ indépendance} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

On procède de même pour toutes les valeurs de $Y(\Omega)$ et on obtient :

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*6*	*9*
$P(Y=k)$	1/9	2/9	2/9	1/9	2/9	1/9

Remarque : *on vérifie facilement que $\sum_{k\in Y(\Omega)} P(Y=k) = 1$. (C'est un moyen facile de détecter une erreur grossière si la somme ne vaut pas 1).*

Exemple 0.3. *Via une formule générale*
On dispose d'une pièce dont la probabilité de tomber sur pile vaut $p \in]0;1[$.
On la lance successivement jusqu'à obtenir r fois pile.
On note Z le nombre de lancers réalisés.
Donner la loi de Z.

- *Tout d'abord, pour obtenir r fois pile il faut faire au moins r lancers. Par ailleurs, on n'a aucune borne sur le moment de la survenue du r-ème pile donc :*

$$Z(\Omega) = [\![r; +\infty [\![= \{r; r+1; r+2; \ldots\}.$$

- *Soit $k \geqslant r$. Si $Z = k$ alors nécessairement le dernier lancer (le k-ème) est un pile.*
Durant les $k-1$ lancers précédents, on a obtenu $r-1$ pile.
Il y a donc $\binom{k-1}{r-1}$ tirages possibles qui donnent $Z = k$.
De plus, chacun de ces tirages a pour probabilité $p^r(1-p)^{k-r}$(r fois pile et $k-r$ fois face & lancers indépendants), d'où :

$$\forall k \geqslant r, P(Z=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

Remarque : *le cas $r = 1$ de cet exemple correspond à la loi géométrique.*