TD 13 - Électrostatique 2 - Théorème de Gauss

January 14, 2026

1 Retour sur le plan infini - Analyse de la démonstration - I

On revient sur l'exemple du plan infini de charge σ uniforme. On va analyser les différentes étapes de la démonstration.

- On se place en coordonnées cartésiennes et on cherche à calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution de charge.

  Question d'analyse 1 Faire un schéma de cette distribution de charge

- Le problème est invariant par translation selon les directions x et y ainsi $\vec{E}$ ne dépend que de z. Soit un point $M(x, y, z)$ hors du plan. Tous les plans orthogonaux au plan (Oxy) et contenant M sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ $\vec{E}$ est contenu dans l'intersection de ces plans ainsi $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$.

  Question d'analyse 2 Dessiner deux de ces plans de symétrie. Surligner l'intersection entre ces deux plans.

  Le plan (Oxy) est également un plan de symétrie des charges donc c'est également un plan de symétrie pour le champ électrique ainsi on a $E(z) = -E(-z)$.

  Question d'analyse 3 Dessiner quelques lignes de champ $\vec{E}$ au dessus et en dessous du plan (Oxy)

- On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède de hauteur $2h$ et de section S. On appelle S_{lat} sa surface latérale, orientée selon $\vec{u}_x$ où $\vec{u}_y$.

- Calculons le flux de $\vec{E}$ à travers ce parallélépipède.

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} E(z)\vec{u}_z \cdot \mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{u}_x + 0 + 0 + 0 + \oiint_S E(z)\vec{u}_z \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{u}_z + \oiint_S E(-z)\vec{u}_z \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y(-\vec{u}_z) \quad (1)$$

  Les 0 correspondent aux autres intégrales sur les autre surfaces latérales, qui sont toutes orientées selon $\vec{u}_x$ ou $\vec{u}_y$, le produit scalaire avec $\vec{u}_z$ rendant donc toutes ces intégrales nulles. Or on a vu qu'on avait $E(z) = -E(-z)$ donc

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2E(z)S \quad (2)$$

  Question d'analyse 4 Expliciter l'expression de $\mathrm{d}\vec{S}$ pour toutes les intégrales.

  Question d'analyse 5 Pourquoi peut-on sortir $E(z)$ de l'intégrale dans les deux dernières intégrales ?

  Calculons la charge comprise dans le volume $\mathcal{V}$ à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$Q_{\text{int}} = \sigma S \quad (3)$$

- Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \implies 2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

On trouve finalement le champ électrostatique créé par un plan chargé infini

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{si} \quad z > 0 \quad ; \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad \text{si} \quad z < 0 \tag{5}$$

Question d'analyse 6 Tracer E en fonction de z. Le champ est il continu en $z = 0$?

2 Cylindre chargé non-uniformément - III

On considère un cylindre de grande hauteur L de densité volumique de charge

$$\rho(r) = \frac{\lambda}{r}\exp(-r/a) \tag{6}$$

On pourra considérer que L est infini lors des études d'invariance et de symétrie.

1. Donner l'expression de la charge totale Q du cylindre en fonction de a, L et λ.
2. Déterminer à l'aide du théorème de Gauss l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution.

3 Couche d'épaisseur non nulle chargée uniformément - III

On considère une couche d'épaisseur a, orthogonale à l'axe $\vec{e}_z$ et comprise entre les plans de hauteur $z = a/2$ et $z = -a/2$, de densité volumique de charge ρ uniforme. Cette distribution est schématisée sur la figure 1.

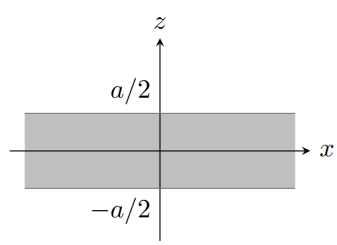

Figure 1: Couche d'épaisseur a

1. À l'aide d'arguments de symétrie et d'invariances, montrer que le champ $\vec{E}$ peut s'écrire
$$\vec{E} = E(z)\vec{e}_z \tag{7}$$
2. À l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique $\vec{E}(z)$ créé par cette distribution de charge. On veillera à faire une distinction de cas en fonction de la valeur de z.
3. Quelle est la valeur de $\vec{E}$ dans le plan (Oxy) ? Interpréter à l'aide d'arguments de symétrie.
4. Tracer $E(z)$ en fonction de z pour $\rho > 0$.
5. Si l'on considère que cette couche devient très fine et que l'on souhaite la modéliser à l'aide d'une densité surfacique de charge σ, exprimer σ en fonction de ρ et a. Comparer l'expression du champ $\vec{E}$ obtenu hors de la couche avec celle obtenu pour un plan infiniment fin de charge surfacique σ.

4 Cylindres concentriques - IV

On considère une distribution de charge constituée de deux cylindres concentriques infinis de même axe (O_z). Le premier cylindre, de rayon R_1, est un cylindre plein chargé en volume par une densité de charge $\rho(r) = -\alpha r$, $\alpha >$, $0 < r < R_1$. Le second cylindre, de rayon $R_2 > R_1$ est un cylindre creux chargé uniquement sur son pourtour extérieur avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Cette distribution est schématisée sur la figure 2.

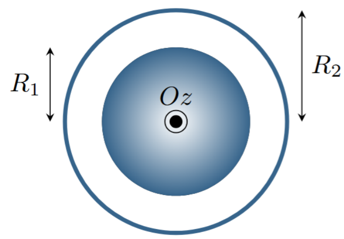

Figure 2: Cylindres concentriques.

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution.
2. Étudier la continuité de $\vec{E}$ en $R = R_1$ et $R = R_2$.
3. Représenter l'amplitude de E en fonction de r.