

Éléments de surface et de volume en coordonnées cylindriques et sphériques

1 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Relations avec les coordonnées cartésiennes

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Élément de volume

$$dV = r dr d\theta dz$$

Éléments de surface

Surface considérée	Élément de surface
$r = \text{cste}$ (cylindre)	$d\vec{S} = r d\theta dz \vec{e}_r$
$\theta = \text{cste}$ (plan radial)	$d\vec{S} = dr dz \vec{e}_\theta$
$z = \text{cste}$ (plan horizontal)	$d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_z$

2 Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Convention :

- r : distance à l'origine
- θ : angle polaire (depuis l'axe z)
- φ : angle azimutal (dans le plan xy)

Relations avec les coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Élément de volume

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Éléments de surface

Surface considérée	Élément de surface
$r = \text{cste}$ (sphère)	$d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$
$\theta = \text{cste}$ (cône)	$d\vec{S} = r \sin \theta dr d\varphi \vec{e}_\theta$
$\varphi = \text{cste}$ (plan méridien)	$d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_\varphi$

3 Astuces

- Quand il y a du $d\theta$ il y a toujours le facteur $rd\theta$
- Coordonnées sphériques : quand il y a du $d\varphi$, il y a toujours le facteur $r \sin \theta d\varphi$