

Éléments de surface et de volume en coordonnées cylindriques et sphériques

1 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Relations avec les coordonnées cartésiennes

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Élément de volume

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Éléments de surface

Surface considérée	Élément de surface
$r = \text{cste}$ (cylindre)	$d\vec{S} = r \, d\theta \, dz \, \vec{e}_r$
$\theta = \text{cste}$ (plan radial)	$d\vec{S} = dr \, dz \, \vec{e}_\theta$
$z = \text{cste}$ (plan horizontal)	$d\vec{S} = r \, dr \, d\theta \, \vec{e}_z$

2 Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Convention :

- r : distance à l'origine
- θ : angle polaire (depuis l'axe z)
- φ : angle azimutal (dans le plan xy)

Relations avec les coordonnées cartésiennes

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Élément de volume

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

Éléments de surface

Surface considérée	Élément de surface
$r = \text{cste}$ (sphère)	$d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$
$\theta = \text{cste}$ (cône)	$d\vec{S} = r \sin \theta dr d\varphi \vec{e}_\theta$
$\varphi = \text{cste}$ (plan méridien)	$d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_\varphi$

3 Astuces

- Quand il y a du $d\theta$ il y a toujours le facteur $r d\theta$
- Coordonnées sphériques : quand il y a du $d\varphi$, il y a toujours le facteur $r \sin \theta d\varphi$