Programme de khôlle 15
Semaine du 19 janvier 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***prod_mat(A,B)*** qui reçoit en argument deux matrices carrées de même taille et qui renvoie $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T \times B\right)$.
2. ***prod_poly1(P,Q)*** qui reçoit en argument deux polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et qui renvoie $\langle P \mid Q\rangle_1 = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
3. ***prod_poly2(P,Q)*** qui reçoit en argument deux polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et qui renvoie $< P \mid Q >_2 = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

2 Pratique calculatoire

Pour chaque espace euclidien E muni d'un produit scalaire φ ,appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille libre $\mathscr{F}$ afin de produire une base orthonormée pour l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$:

1. $E = \mathbb{R}^3, \varphi$ le produit scalaire usuel, $\mathscr{F} = ((1, 0, -1), (1, -1, 0))$
2. $E = \mathbb{R}^4, \varphi$ le produit scalaire usuel, $\mathscr{F} = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1))$
3. $E = \mathbb{R}_3[X], \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t, \mathscr{F} = (1, X, X^2)$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *1. Pour tous vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on pose :*

$$< \vec{x} \mid \vec{y} >= (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

Montrer que $< . \mid . >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2. *On note* $E = \mathbb{R}[X]$ *et pour tout* $(P,Q) \in E^2$ *on pose :*

$$< P \mid Q >= \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t.$$

   (a) *Justifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'intégrale* $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$ *est convergente.*

   (b) *Montrer que* $< . \mid . >$ *définit un produit scalaire sur* E*.*

Exercice 3.2. 1. *Soient* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*.*

   (a) *Démontrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

   et étudier les cas d'égalité.

   (b) *On suppose en outre que* $x_k > 0$ *pour chaque* $k \in \{1, \dots, n\}$*. Démontrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$

   et étudier les cas d'égalité.

2. *On considère* $\mathbb{R}^4$ *muni de son produit scalaire canonique et* F *l'ensemble défini par :*

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y + z - t = 0\right\}$$

   (a) *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et en déterminer une base* $\mathscr{B}$*.*

   (b) *Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base* $\mathscr{B}$*, construire une base orthonormée de* F *que l'on notera* $\mathscr{C}$*.*

   (c) *Le vecteur* $\vec{u} = (1, \frac{1}{2}, 2, 2)$ *appartient-il à* F *?*
   Si c'est le cas, donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$*.*

Exercice 3.3. *On note* $E = \mathscr{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues et* T*-périodiques* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}($ *où* $T > 0)$*.*

1. *Montrer que* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
2. *Montrer que* $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$ *définit un produit scalaire sur* E*.*
3. *On pose* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ *(la pulsation associée à la période* T *). On pose, pour* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$c_n : t \mapsto \cos(n\omega t), \quad s_n : t \mapsto \sin(n\omega t).$$

   (a) *Montrer que les familles* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont orthogonales pour le produit scalaire défini dans la question précédente.*

(b) Montrer que la famille $\mathscr{F} = (c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \cdots, c_n, s_n, \cdots)$ *est orthogonale.*

(c) Calculer la norme des fonctions de la famille $\mathscr{F}$*.*

Chap.10 : Espaces préhilbertiens réels