Exercices Chap.12 : Variables aléatoires réelles discrètes

1 Généralités

Exercice 1.1. *Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.*
On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.
On notera :

- B_i *l'événement "au* $i^{\text{ème}}$ *tirage on obtient une boule blanche"*
- N_i *l'événement "au* $i^{\text{ème}}$ *tirage on obtient une boule noire".*

1. *Soit* X *le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de* X?
2. X *admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.*

Exercice 1.2. *Une urne contient* N *jetons numérotés de 1 à* N.
On effectue n *tirages successifs avec remise, et on note sous forme de* n*-uplet le résultat de ces* n *tirages.*

On note Ω *l'univers de cette expérience,* X_k *la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu au* $k^{\text{ème}}$ *tirage* ($k \in [\![1;n]\!]$) *et* Y *la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.*

1. *Quelle est la valeur de* $|\Omega|$ *?*
2. *Soit* $k \in [\![1;n]\!]$.
   (a) *Déterminer la loi de* X_k.
   (b) *Calculer pour* $i \in X_k(\Omega), P(X_k \leqslant i)$.
3. *Que vaut* $Y(\Omega)$?
4. *Pour tout* $i \in Y(\Omega)$, *exprimer l'événement* $[Y \leqslant i]$ *à l'aide des variables aléatoires* X_k *puis en déduire la valeur de* $P(Y \leqslant i)$.
5. *Quelle relation a-t-on entre* $P(Y = i), P(Y \leqslant i)$ *et* $P(Y \leqslant i-1)$ *lorsque* i *et* $i-1$ *appartiennent à* $Y(\Omega)$?
6. *En déduire la loi de* Y.

Exercice 1.3. *On considère un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro* k *soit proportionnelle à* k, *avec pour coefficient de proportionnalité le réel* p.
On lance une fois le dé et on note X *le numéro de la face obtenue.*

1. *Déterminer la loi de* X *(en fonction de* p *).*

2. *Déterminer la valeur de p.*
3. *Calculer $E(X)$.*

Exercice 1.4. *Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne.*
On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.
On note B_i (resp. R_i) l'événement ≪ obtenir une boule blanche (resp. rouge) au i ème tirage ≫.

1. *Déterminer la loi de X et $E(X)$.*
2. *Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.*

Exercice 1.5. *On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. *Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité en posant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = u_n.$$

2. *La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?*
3. *La variable aléatoire $\sqrt{X}$ admet-elle un espérance ?*

2 Lois usuelles

Exercice 2.1. *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.*

1. *Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{1+X}$.*
2. *Déterminer la probabilité que la valeur de X soit paire.*

Exercice 2.2. *Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :*

$$\begin{cases} Y = k \text{ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 \text{ si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. *Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.*
2. *Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$*

3. *Vérifier que :* $\sum\limits_{k=0}^{n} P(Y=k)=1$.

4. *Pour* $x \neq 1$ *et* n *entier naturel non nul, montrer que :*

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$$

5. *En déduire* $E(Y)$.

Exercice 2.3. *Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées* $0, 1, 2, \ldots$ *de gauche à droite.*
Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0.
Soit X_n *la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après* n *sauts.*

1. *Déterminer la loi de probabilité de* X_1, *et calculer* $E(X_1)$ *et* $V(X_1)$.
2. *On appelle* Y_n *la VAR égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des* n *premiers sauts.*
   Déterminer la loi de Y_n, *puis* $E(Y_n)$ *et* $V(Y_n)$.
3. *Exprimer* X_n *en fonction de* Y_n *et en déduire la loi de probabilité de* X_n, *puis* $E(X_n)$ *et* $V(X_n)$.

Exercice 2.4. *Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est* $\frac{1}{4}$. *On note* R *l'événement ´ l'intervention a lieu avec un retard ˇ.*

1. *Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par* X *la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.*
   (a) *Déterminer la loi de probabilité de* X, *l'espérance et la variance de* X.
   (b) *Calculer la probabilité de l'événement : le client a subi au moins un retard.*
2. *Au cours des années 1998 et 1999 le service après-vente enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 1998 (resp. 1999) définit une variable aléatoire* Y(*resp.* Z).
   (a) *Déterminer les lois de* Y *et* Z.
   (b) *Calculer* $P(Y \leqslant k)$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) *On pose* $T = \max(Y, Z)$.

i. *Calculer* $P(T \leqslant k)$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$. *(On rappelle que* $[T \leqslant k] = [Y \leqslant k] \cap [Z \leqslant k]$*)*

ii. *Déterminer la loi de* T.

iii. *Calculer l'espérance de* T.

Exercice 2.5. *Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit* X *le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.*

1. *Déterminer la loi de* X *(envisager 2 cas : avec ou sans remise).*
2. *Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise.*
   Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 3.1. *Une usine confectionne des pièces dont une proportion* p *est défectueuse. La valeur de* p *est inconnue mais on souhaiterait en connaitre une estimation.*
Pour cela on prélève n *pièces et on note* Z_n *le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement.*
On considère que le nombre total de pièces dans l'usine est assez grand pour que le prélèvement des n *pièces soit considéré comme une suite de* n *tirages avec remise.*
L'idée est d'approcher la valeur de p *par la valeur de* $\frac{Z_n}{n}$.
On va donc chercher à partir de quelle valeur de n *cette approximation sera "bonne".*

1. *Quelle est la loi de* Z_n *?*
2. *En déduire l'espérance et la variance de* Z_n.
3. (a) *Montrer que pour tout* $x \in [0;1], x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   (b) *Montrer que pour tout* ε *positif,* $P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$
4. *En déduire une condition sur* n *pour que* $\frac{Z_n}{n}$ *soit une valeur approchée de* p *à* 10^{-2} *près avec une probabilité supérieure ou égale à* 95%.

Exercice 3.2. *On sait que* 40% *des individus d'une population possèdent un certain caractère* C *(par exemple les yeux bleus). On considère un échantillon de 200 personnes de cette population.*
Peut-on affirmer, à plus de 80%, *que dans cet échantillon il y a entre 30 et* 50% *de personnes ayant le caractère* C?

4 Approximation de la loi binomiale

Exercice 4.1. *Un livre de 500 pages contient avant la première lecture un nombre $n \geqslant 100$ d'erreurs typographiques réparties au hasard (on suppose que n est inférieur à 7500).*

1. *Quelle est la loi exacte de la variable aléatoire Y_0 égale au nombre d'erreurs de la page 15 avant la première lecture ?*
   Par quelle loi peut-on l'approcher ?

   On supposera dans les deux questions suivantes que Y_0 suit cette loi approchée.
2. *On effectue des lectures successives de cette page.*
   À chaque lecture, les erreurs subsistantes peuvent être détectées (et donc corrigées) indépendamment les unes des autres, chacune avec une probabilité $\frac{1}{3}$.
   On posera $\lambda = \frac{n}{500}$. On note Y_i le nombre d'erreurs restant sur la page 15 après la $i^{\text{ème}}$ lecture.
   Calculer pour j et k entiers les probabilités conditionnelles :
   $$P_{[Y_0=k]}\left(Y_1 = j\right).$$
   On distinguera selon que $j \leqslant k$ ou $j > k$.
3. *En déduire la loi de Y_1, puis celle de Y_i.*

5 Sujets de concours

Exercice 5.1. *On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc 2 rois rouges.*
On envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.
On note R_k l'événement : "la carte obtenue au $k^{\text{ème}}$ essai est un roi rouge".

I. Premier protocole

Les cartes sont alignés sur une table de façon aléatoire.
Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.
A chaque fois que le joueur découvre une carte, il paie 1 euro et lorsqu'il découvre le premier roi rouge il gagne a euros (où $a \in \mathbb{N}^*$).
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. *Déterminer la loi de X.*
2. *Montrer que $E(X) = \frac{2n+1}{3}$. $\left(\underline{\text{Rappel}} : \sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\right)$.*
3. *Exprimer G_1 en fonction de X et en déduire $E\left(G_1\right)$.*

II. Deuxième protocole
Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
X désigne toujours le rang d'apparition du premier roi rouge et on note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. *Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.*
2. *Vérifier : $P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$.*
3. *Montrer : $E(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.*

6 Pour aller plus loin

Exercice 6.1. *On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir face est égale à $\frac{1}{3}$.*
Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$.
On note de plus F_i l'événement "obtenir face au i-ème lancer".

1. *Expliciter les événements $[X = 2], [X = 3], [X = 4], [X = 5]$ à l'aide des événements F_i et $\overline{F_i}$ Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5*
2. *A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :*

$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = \frac{2}{9} p_{n-2} + \frac{1}{3} p_{n-1}$$

3. *En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.*
4. *Calculer $E(X)$.*

Exercice 6.2. *Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.*
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
On note B_i (resp. R_i) l'événement " obtenir une boule blanche (resp. rouge) au $i^{\text{ème}}$ tirage".

1. *Déterminer la loi de* X_1.
2. *Déterminer la loi de* X_2.
3. *Conjecturer la loi de* X_n *et démontrer ce résultat par récurrence sur* n.