Chap.13 : Séries de Fourier

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Fonctions T-périodiques **3**
2.1 Définition . . . 3
2.2 Régularité . . . 4
2.3 Intégration . . . 5

3 Séries de Fourier **5**
3.1 Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues 5
3.2 Coefficients de Fourier . . . 8
3.2.1 Définition . . . 8
3.2.2 Cas particuliers . . . 8
3.3 Série de Fourier . . . 10

4 Les théorèmes de convergence **11**
4.1 Théorème de Dirichlet . . . 11
4.2 Théorème de Parseval . . . 14

5 Sous Python **15**

1 Introduction

Jean Baptiste Joseph Fourier

Brillant mathématicien, humaniste, égyptologue proche des frères Champollion, Joseph Fourier (Auxerre, 1768 - Paris, 1830) est remarqué par Napoléon Bonaparte lors de l'expédition en Égypte et rédige la préface historique de la Description de l'Égypte.
Nommé préfet de l'Isère (1802-1815) à son retour, il concilie son activité avec ses recherches scientifiques ; il est notamment à l'origine de l'assèchement des marais de Bourgoin et d'une route reliant Grenoble à Turin par les cols du Lautaret et de Montgenèvre.

Une série trigonométrique de période $T > 0$ est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites de nombres réels.
La théorie des séries de Fourier permet sous certaines conditions de décomposer de manière effective une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sous la forme (*).

Les prémices de ce type de problème remontent à une controverse éclatant aux alentours de 1750 entre d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur le problème des cordes vibrantes.
Le français d'Alembert détermine l'équation d'onde ainsi que ses solutions sous formes analytiques, tandis que Bernoulli les obtient sous forme de décomposition en série trigonométrique.
La discussion porte sur la nécessité de concilier ces deux points de vue.

En 1807 ,Joseph Fourier introduit les séries de Fourier et la transformation de Fourier dans son mémoire "Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides" qu'il présente à l'Académie des sciences afin de résoudre l'équation de la chaleur. Ces premiers travaux, controversés sur le plan de l'analyse, ne furent pas publiés, mais on les retrouve en grande partie dans son œuvre maîtresse Théorie analytique de la chaleur publiée en 1822.

D'un point de vue moderne, les travaux de Fourier manquent de rigueur, notamment à cause du flou entourant les notions de fonction et d'intégrale au début du XIXe siècle. Par la suite, Dirichlet et Riemann ont contribué à la formalisation des idées de Fourier. Le premier a démontré en 1829 le théorème de convergence de la série de Fourier portant aujourd'hui son nom. Le second a présenté en 1854, à l'occasion de sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen, un travail intitulé Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique qui constitue une avancée décisive : l'auteur lève un obstacle majeur en définissant pour la première fois une théorie de l'intégration satisfaisante.

Du point de vue de la physique, on sait que tout signal se décompose comme une superposition de signaux sinusoïdaux. La théorie des séries de Fourier permet de déterminer cette décomposition dans le cas d'un signal périodique.

Dans tout ce chapitre T désignera un réel strictement positif et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation associée à T.

2 Fonctions T-périodiques

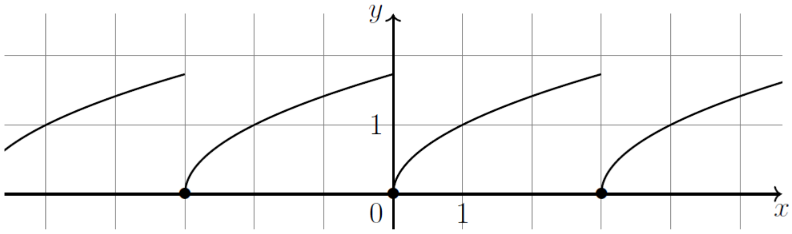
2.1 Définition

Définition 2.1. *Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. f$ est dite* ***périodique*** *de période T ou T-périodique si :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)$$

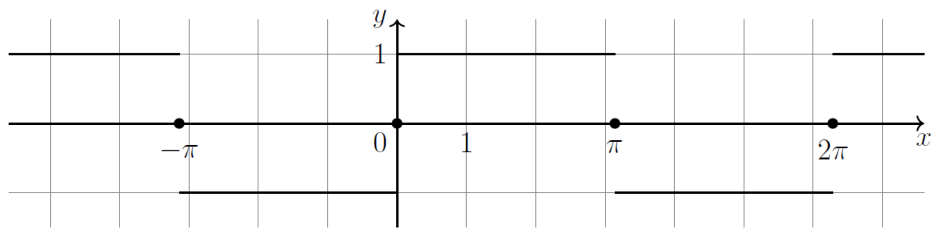
Exemple 2.2.

1. *La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est 2π-périodique.*
2. *La fonction $t \mapsto \cos(2\pi t)$ est 1-périodique.*
3. *Voici la fonction f, 3-périodique, définie par $\forall t \in [0;3[, f(t) = \sqrt{t}$:*



4. *Voici la fonction g, 2π-périodique et impaire, définie par :*

$$\forall t \in]0;\pi[, g(t) = 1 \text{ et } g(\pi) = 0 \text{ :}$$



Dans tout ce chapitre T désignera un réel strictement positif et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation associée à T.

2.2 Régularité

On rappelle la définition suivante, vue dans le chapitre "Intégrales : rappels et généralisation".

Définition 2.3. *Soit f une fonction définie sur $[a;b] (a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
*On dit que la fonction f est **continue par morceaux** sur $[a;b]$ (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si, et seulement si, il existe une subdivision*

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n$$

telle que, pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle $]a_i;a_{i+1}[$ peut se prolonger en une fonction continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i;a_{i+1}]$.
Autrement dit la fonction f est continue (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur tous les intervalles $]a_i;a_{i+1}[$ et f (resp. f et f') admet (resp. admettent) des limites finies à droite et à gauche en a_i pour tout i.

Définition 2.4. *Une fonction T-périodique est dite continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période (c'est-à-dire un intervalle du type $[a;a+T]$)*

Exemple 2.5.
- *La fonction représentée sur la figure 1 est continue par morceaux mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux car en 0^+la dérivée de f n'admet pas une limite finie.*
- *La fonction représentée sur la figure 2 est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (donc aussi continue par morceaux).*

Proposition 2.6. *L'ensemble des fonctions T-périodiques et continues par morceaux est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel que nous noterons $\mathscr{C}_{\boldsymbol{M,T}}(\mathbb{R})$.*

Remarque 2.7.
- *Cela signifie que toute combinaison linéaire de deux fonctions T-périodiques et continues par morceaux est une fonction T-périodique et continue par morceaux.*
- *On notera $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et T-périodiques.*

2.3 Intégration

Proposition 2.8. *Soit $f \in \mathscr{C}_{M,T}(\mathbb{R})$. Alors :*
- *Pour tout réel a : $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.*
  En particulier $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$
- *Si f est une fonction paire : $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$.*
- *Si f est une fonction impaire : $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$*

Preuve :

3 Séries de Fourier

3.1 Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}_T(\mathbb{R})$ (fonctions continues T-périodiques) muni du produit scalaire :

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la **pulsation** associée à T.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note c_n la fonction définie par :

$$c_n(t) = \cos(n\omega t)$$

et s_n la fonction définie par :

$$s_n(t) = \sin(n\omega t).$$

Ces fonctions s'appellent **les modes de Fourier** associés à la période T.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on considère

$$F_N = \text{Vect}\,(c_0, c_1, \dots, c_N, s_1, s_2, \dots, s_N).$$

Nous allons déterminer le projeté orthogonal de la fonction f sur le sous-espace vectoriel F_N.

1. Cherchons une BON de F_N :

On remarque tout d'abord que la famille $(c_0, c_1, \dots, c_N, s_1, s_2, \dots, s_N)$ est une famille orthogonale :

- $\forall (i,j) \in [\![0; N]\!]^2$, tels que $i \neq j$:

  $\langle c_i \mid c_j \rangle =$

- $\forall (i,j) \in [\![1; N]\!]^2$, tels que $i \neq j$:

  $\langle s_i \mid s_j \rangle =$

- $\forall (i,j) \in [\![0; N]\!] \times [\![1; N]\!]$, la fonction $t \mapsto \cos(i\omega t)\sin(j\omega t)$ est T-périodique et impaire donc :

$$\langle c_i \mid s_j \rangle =$$

Donc la famille $(c_0, c_1, \ldots, c_N, s_1, s_2, \ldots, s_N)$ est libre (car orthogonale) et génératrice de F_N.
C'est donc une base de F_N.
Comme c'est une famille orthogonale, il suffit de normer les vecteurs pour obtenir une BON.

- $\|c_0\|^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T 1 \ \mathrm{d}t = 1$
- $\forall i \in [\![1; N]\!], \|c_i\|^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T (\cos(i\omega t))^2 \ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \dfrac{1}{2}(1+\cos(2i\omega t))\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$
- $\forall i \in [\![1; N]\!], \|s_i\|^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T (\sin(i\omega t))^2 \ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \dfrac{1}{2}(1-\cos(2i\omega t))\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$

La famille $\left(c_0, \sqrt{2}c_1, \ldots, \sqrt{2}c_N, \sqrt{2}s_1, \sqrt{2}s_2, \ldots, \sqrt{2}s_N\right)$ est une BON de F_N.

2. Projection orthogonale : Soit $f \in \mathscr{C}_T(\mathbb{R})$. Alors on sait que :

$$\begin{aligned} p_{F_N}(f)(t) &= \langle f \mid c_0 \rangle c_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\left\langle f \mid \sqrt{2}c_n \right\rangle \sqrt{2}c_n + \left\langle f \mid \sqrt{2}s_n \right\rangle \sqrt{2}s_n \right) \\ &= \underbrace{\langle f \mid c_0 \rangle}_{a_0(f)} + \sum_{n=1}^{N} (\underbrace{2\langle f \mid c_n \rangle}_{a_n(f)} \cos(n\omega t) + \underbrace{2\langle f \mid s_n \rangle}_{b_n(f)} \sin(n\omega t)) \end{aligned}$$

Or $c_0(t) = 1$ donc $a_0(f) = \langle f \mid c_0 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.
De plus $a_n(f) = 2\langle f \mid c_n \rangle = 2 \times \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$.
Et enfin : $b_n(f) = 2\langle f \mid s_n \rangle = 2 \times \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$.

L'objectif de ce chapitre est de déterminer si, en faisant tendre N vers $+\infty$, $p_{F_N}(f)$ se " rapproche" de f et pour quels types de fonctions cela fonctionne.

3.2 Coefficients de Fourier

3.2.1 Définition

Définition 3.1. *Soit* $T > 0, \omega = \frac{2\pi}{T}$ *la pulsation associée à* T *et* $f \in \mathscr{C}_{M,T}(\mathbb{R})$.
On appelle ***coefficients de Fourier trigonométriques*** *de* f *les réels définis par :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

Remarque 3.2.
- *Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible on pourra noter* a_n *et* b_n *au lieu de* $a_n(f)$ *et* $b_n(f)$.
- *Dans cette définition deux formules sont données pour chaque coefficient, mais il est évident qu'il ne faudra en utiliser qu'une en exercice : à vous de choisir la bonne selon le contexte !*

3.2.2 Cas particuliers

Proposition 3.3.
- *Si* $f \in \mathscr{C}_{M,T}(\mathbb{R})$ *et si* f *est paire alors :*

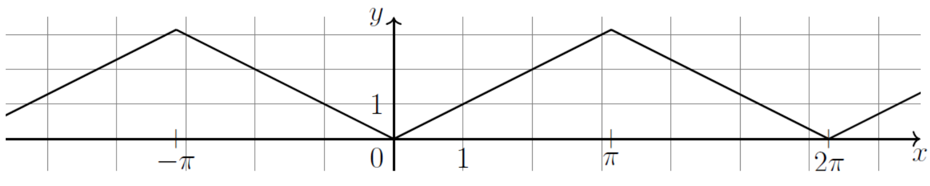
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 0$$
$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

- *Si* $f \in \mathscr{C}_{M,T}(\mathbb{R})$ *et si* f *est impaire alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

Application 3.4. *Soit* f *la fonction* 2π*-périodique définie par :*

$$\forall t \in [-\pi;\pi], f(t) = |t|.$$



Calculer ses coefficients de Fourier.

Application 3.5. *On reprend la fonction g qui est 2π-périodique, impaire et telle que :*

$$\forall t \in \left]0;\pi\right[, g(t) = 1.$$

1. *Combien vaut $g(\pi)$?*
2. *Tracer l'allure de la courbe de g.*
3. *Calculer ses coefficients de Fourier.*

Proposition 3.6. *Si $f \in \mathscr{C}_{M,T}(\mathbb{R})$ et si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

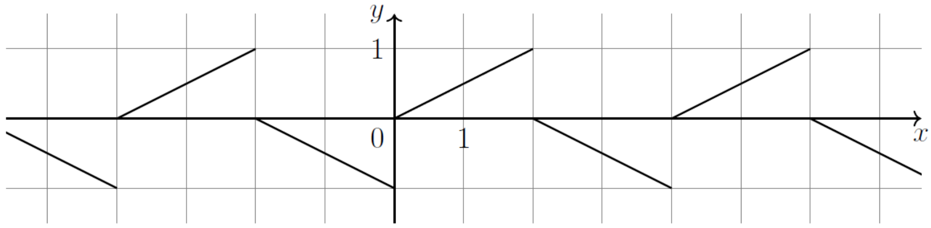
$$f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$$

alors tous les coefficients d'indices pairs sont nuls :

$$a_0(f) = 0 \quad \forall p \geqslant 1 \quad a_{2p}(f) = 0 \quad b_{2p}(f) = 0$$

Exemple 3.7. *Voici un exemple de fonction vérifiant la propriété :*

$$f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x).$$



La fonction g de l'application précédente vérifie aussi cette propriété.

3.3 Série de Fourier

Définition 3.8. *Soit $T > 0, \omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation associée à T et $f \in \mathscr{C}_{M,T}(\mathbb{R})$.*

- *Pour tout réel t, la série $a_0(f)+\sum_{n\geqslant 1}(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t))$ s'appelle la **série de Fourier** de f en t.*
- *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme partielle de Fourier** d'ordre N de la fonction f la fonction $S_N(f)$ définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t))$$

- *Si la série de Fourier de f en t est convergente pour tout t, on appelle somme de la série Fourier de la fonction f la fonction $S(f)$ définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t))$$

Remarque 3.9. *Dans le cas des fonction continues, $S_N(f) = p_{F_N}(f)$.*

Application 3.10. *Soit f la fonction 2π-périodique définie par :*

$$\forall t \in [-\pi;\pi], f(t) = |t|.$$

déjà étudiée.
Calculer la somme partielle de Fourier d'ordre $N \in \mathbb{N}$.

Application 3.11. *On reprend la fonction g qui est 2π-périodique, impaire et telle que :*

$$\forall t \in]0;\pi[, g(t) = 1.$$

Calculer la somme partielle de Fourier d'ordre $N \in \mathbb{N}$.

4 Les théorèmes de convergence

4.1 Théorème de Dirichlet

Définition 4.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On appelle* ***régularisée de la fonction*** *f, et on note $\tilde{f}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h))$$

Remarque 4.2. *Lorsque f est continue en t :*

$$\tfrac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h)) = f(t)$$

et lorsque f n'est pas continue en t :

$$\tfrac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h))$$

correspond à la moyenne de la valeur à droite et la valeur à gauche.

Théorème 4.3. ***Théorème de Dirichlet***
Si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge pour tout réel t et on a :

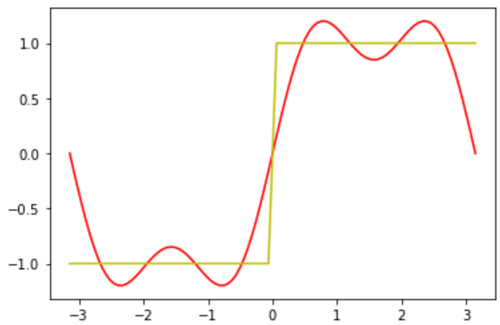
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)) =$$
$$\tfrac{1}{2}\lim_{h\to 0}(f(t+h) + f(t-h)) = \tilde{f}(t)$$

Application 4.4. *À l'aide de la fonction g, 2π-périodique et impaire, définie par :*

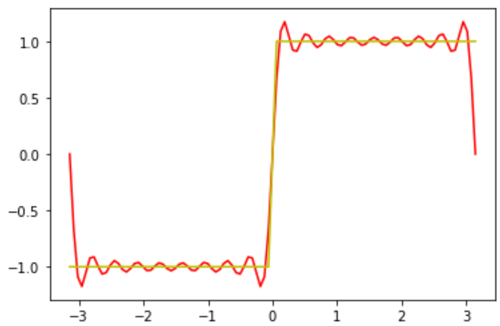
$$\forall t \in \left]0;\pi\right[, g(t) = 1 \ \textit{et}\ g(\pi) = 0$$

calculer la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Voici sur un même tracé les courbes des fonctions g et S_N pour différentes valeurs de N.
Si $N = 6$:



Si $N = 20$:



Corollaire 4.5. ***Théorème de Dirichlet pour une fonction continue***
Si f une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge pour tout réel t et on a :

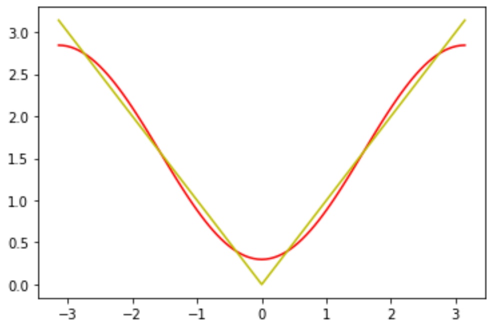
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)) = f(t)$$

Application 4.6. *A l'aide de la fonction f déjà étudiée 2π-périodique définie par :*

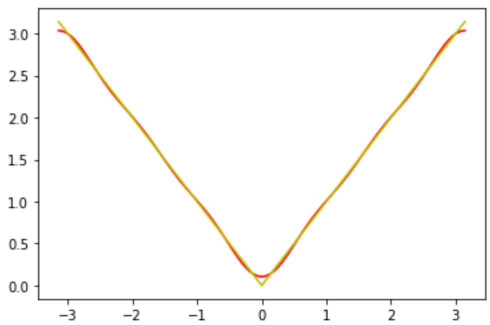
$$\forall t \in [-\pi; \pi], f(t) = |t|.$$

montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ *converge et calculer sa somme.*

Voici sur un même tracé les courbes des fonctions f et S_N pour différentes valeurs de N.
Si $N = 3$:



Si $N = 8$:



4.2 Théorème de Parseval

Théorème 4.7. *Théorème de Parseval*
Si f une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors les séries $\sum (a_n(f))^2$ et $\sum (b_n(f))^2$ convergent et on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T (f(t))^2 \, \mathrm{d}t = (a_0(f))^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right)$$

Remarque :
Si on reprend le produit scalaire utilisé pour l'interprétation géométrique des séries de Fourier pour les fonctions continues on remarque que le théorème de Parseval s'écrit :

$$\|f\|^2 = \lim_{N\to+\infty} \|S_N(f)\|^2$$

En effet :

$\|S_N(f)\|^2 = \|p_{F_N}(f)\|^2$
$= |\langle f \mid c_0\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(\left|\left\langle f \mid \sqrt{2}c_n\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle f \mid \sqrt{2}s_n\right\rangle\right|^2\right).$

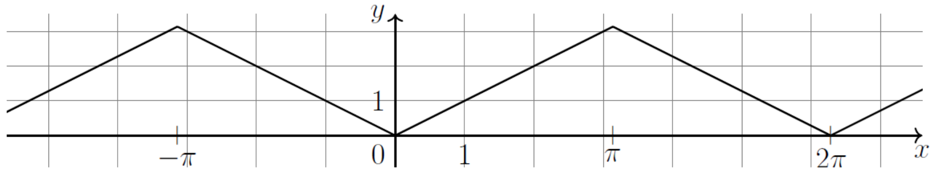
Or :

- $\left|\left\langle f \mid \sqrt{2}c_n\right\rangle\right|^2 = 2\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{1}{2}\left(a_n(f)\right)^2$
- $\left|\left\langle f \mid \sqrt{2}s_n\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left(b_n(f)\right)^2.$

On obtient bien l'égalité de Parseval.

Application 4.8. *A l'aide de la fonction f 2π-périodique définie par :*

$$\forall t \in [-\pi;\pi], f(t) = |t|.$$



montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^4}$ converge et calculer sa somme.

5 Sous Python

Reprenons l'exemple de la fonction f, 2π-périodique définie par :

$$\forall t \in [-\pi;\pi], f(t) = |t|.$$

On souhaite obtenir les courbes de f et de S_N (la somme partielle de Fourier) sur un même graphique.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def S(t,N):
    s=np.pi/2
    for i in range(0,(N-1)//2):
        s=s-(4/np.pi)*(1/(2*i+1)**2)*np.cos((2*i+1)*t)
    return s


N=int(input('Saisir N'))



T=[-np.pi+2*np.pi*i/100 for i in range(101)]
Y=[]
for t in T:
    if t>=-np.pi and t<0:
        Y.append(-t)
    else:
        Y.append(t)
Z=[S(t,N) for t in T]

plt.plot(T,Z,'r')
plt.plot(T,Y,'y')
plt.show()
```