NOM :

Interrogation 6 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}?$$

   Indication : *on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ en éléments simples.*

2. *La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? si oui, la calculer.*
3. *La variable aléatoire X admet-elle une variance ? si oui, la calculer.*

1. On a $\frac{a}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a/2}{k} - \frac{a}{k+1} + \frac{a/2}{k+2}$ pour tout $k \geq 1$.
   Donc par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{4} - \frac{a}{2(n+1)} + \frac{a}{2(n+2)},$$

   ce qui montre (en faisant tendre $n \to +\infty$) que la série $\sum\limits_{k \geq 2} \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$ converge et sa somme vaut $\frac{a}{4}$.

   En posant a $= 4$ et $p_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$, on a donc $p_k \geq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$, ce qui montre que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Sous réserve de convergence (absolue) de cette série positive, on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)}.$$

   Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{k+1} - \frac{4}{k+2} \right) = 2 - \frac{4}{n+2},$$

   donc (en faisant tendre $n \to +\infty$), on obtient la convergence de la série, donc l'existence de $E(X)$, qui vaut 2 .

3. Puisque $E(X)$ existe, la variance $V(X)$ existe si, et seulement si, $E\left(X^2\right)$ existe, c'est-à-dire si, et seulement si, la série $\sum_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge.
   Mais ce n'est pas le cas, car :

$$k^2\mathbb{P}(X=k) = \tfrac{4k}{(k+1)(k+2)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \tfrac{4}{k}$$

et la série $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{4}{k}$ diverge.

Finalement, la variable aléatoire X **ne possède pas de variance**.

Exercice 0.2. *Une entreprise fabrique des lampes, dont* 80% *durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille* $n = 15$.

1. *On note* X *le nombre de lampes ayant une durée de vie supérieure à 3000 heures.*
   Quelle est la loi de X *?*
2. *Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures ?*
3. *Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?*
4. *Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus durent plus de 3000 heures ?*

1. L'expérience aléatoire est la suivante : 15 fois de suite, et de manière indépendante, on teste la durée de vie d'une lampe, et la probabilité de "succès" (durée supérieure à 3000 heures) est $p = 0,8$ à chaque fois. La variable aléatoire X qui donne le nombre de "succès" lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, 15\}$ et suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ avec $n = 15$ et $p = 0,8$.
2. On a $E(X) = np = 15 \times 0,8 = 12$.
   Le nombre de lampes ayant une durée de vie inférieure à 3000 heures étant $15 - X$, on a :
   $$E(15-X) = 15 - E(X) = 15 - 12 = 3,$$
   donc il y a en moyenne 3 lampes de l'échantillon ayant une durée de vie inférieure à 3000 heures.
3. On cherche $\mathbb{P}(X = 15)$. Or $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ donc :
   $$\mathbb{P}(X=15) = \binom{15}{15} p^{15}(1-p)^0 = 0,8^{15} \simeq 3,5\%$$
4. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X\geq 13) &= \mathbb{P}(X=13)+\mathbb{P}(X=14)+\mathbb{P}(X=15)\\ &= \binom{15}{13}p^{13}(1-p)^2+\binom{15}{14}p^{14}(1-p)^1+\binom{15}{15}p^{15}(1-p)^0\\ &= 105\times 0,8^{13}\times 0,2^2+15\times 0,8^{14}\times 0,2+0,8^{15}\simeq 40\%\end{aligned}$$