Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

Table des matières

Dans tout ce chapitre $(E, \langle . \mid . \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, c'est-à-dire E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\langle . \mid . \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera de plus $\|.\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$.

1 Isométries

1.1 Groupe orthogonal

Définition 1.1. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est une* ***isométrie*** *de E si et seulement si f "conserve la norme", c'est-à-dire :*

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

Application 1.2. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) défini par $f(x, y, z) = (z, x, y)$.*
Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.3. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.f est une isométrie de E si et seulement si f "conserve le produit scalaire", c'est-à-dire :*

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \langle f(\vec{x}) \mid f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$$

Preuve :

Proposition 1.4. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une isométrie de E ;*
2. *f est un endomorphisme de E transformant toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E ;*
3. *f est un endomorphisme de E et il existe une base orthonormée de E que f transforme en une base orthonormée.*

Méthode 1.5. *Dans un espace euclidien, pour montrer qu'un endomorphisme est une isométrie on dispose donc pour l'instant de trois méthodes :*

- *montrer qu'il conserve la norme :*

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \,;$$

- *montrer qu'il conserve le produit scalaire :*

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \langle f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{y}\rangle;$$

- *montrer qu'il transforme une base orthonormée (on peut choisir une base ou en prendre une quelconque) en une base orthonormée.*

Définition 1.6. *L'ensemble de toutes les isométries de E s'appelle le **groupe orthogonal** de E et se note $\mathscr{O}(E)$*

Proposition 1.7. *Soient f et g deux isométries de E.*

- *$f \circ g$ est une isométrie de E.($\mathscr{O}(E)$ est stable par composée.)*
- *f est un automorphisme de E (c'est-à-dire f est bijectif) et f^{-1} est aussi une isométrie.*

Preuve :

Proposition 1.8. *Soit f une isométrie de E et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f (c'est-à-dire $f(F) \subset F$) alors $F^{\perp}$ est stable par f.*

Preuve :

1.2 Symétrie orthogonale

Définition 1.9. *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*
Comme $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ (car E de dimension finie), pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un unique vecteur $\vec{y} \in F$ et un unique vecteur $\vec{z} \in F^{\perp}$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
L'application s_F qui à tout vecteur $\vec{x}$ de E associe le vecteur $\vec{y} - \vec{z}$ s'appelle la ***symétrie orthogonale par rapport à*** *F.*

Proposition 1.10. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F.*
Alors s_F est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$, c'est-à-dire s_F est un endomorphisme de E tel que $s_F \circ s_F = \mathrm{id}_E$.

Remarque 1.11. *Pas de démonstration détaillée ici, mais il suffit de remarquer que l'application s_F définie ci-dessus est une application linéaire et on voit rapidement que :*

$$s_F\left(s_F(\vec{x})\right) = s_F(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{y} - (-\vec{z}) = \vec{x}.$$

Proposition 1.12. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors s_F est une isométrie de E.*

Preuve :

Définition 1.13. *Soit F un hyperplan de E (c'est-à-dire* $\dim(F) = \dim(E) - 1$*).*
*Alors la symétrie orthogonale par rapport à F s'appelle aussi **la réflexion par rapport à** F.*

1.3 Matrices orthogonales

Définition 1.14. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une **matrice orthogonale** si et seulement si elle vérifie*

$$M^T \times M = I_n$$

où I_n désigne la matrice identité.

Application 1.15. *Montrer que* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice orthogonale.*

Définition 1.16. *L'ensemble de toutes les matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'appelle le **groupe orthogonal d'ordre** n et se note $\mathscr{O}(n)$ ou $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 1.17. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *M est une matrice orthogonale ;*
2. *les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique ;*
3. *les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique ;*
4. *M est inversible et $M^{-1} = M^T$.*

Méthode 1.18. *Voici les méthodes dont nous disposons pour l'instant pour montrer qu'une matrice carrée est orthogonale :*

- *Vérifier que l'on a $M^T \times M = I_n$.*
- *Vérifier que les colonnes (ou les lignes) de M, vues comme des n-uplets, sont orthogonales deux à deux et sont toutes de norme 1. (Les colonnes formeront donc une famille orthonormée, donc libre, de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, par conséquent une BON.)*
- *Si on a déjà calculé M^{-1}, remarquer que $M^{-1} = M^T$. (Assez rarement utilisée)*

Remarque 1.19. *Pour une matrice orthogonale $M^{-1} = M^T$ donc :*

$$M^T \times M = M \times M^T = I_n.$$

Application 1.20. *Montrer que la matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale et en en déduire M^{-1}.*

Proposition 1.21. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.*
La base $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale.

Méthode 1.22.

- *Cette propriété nous donne une méthode supplémentaire pour montrer qu'une matrice est orthogonale : si on remarque que la matrice que l'énoncé nous donne est la matrice de passage entre deux bases orthonormée alors on peut conclure que cette matrice est orthogonale.*

- *Pour une matrice de passage entre deux bases orthonormées, pas besoin de gros calculs pour avoir P^{-1} :*

$$P^{-1} = P^T$$

- *Cette propriété nous donne aussi une méthode supplémentaire pour montrer qu'une base $\mathscr{B}'$ est orthonormée : si on sait que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée et que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est orthogonale alors on peut conclure que $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée.*

Proposition 1.23. *Soit M une matrice orthogonale. Alors :*

$$\det(M) \in \{-1; 1\}.$$

Preuve :

Définition 1.24. *L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 s'appelle **le groupe spécial orthogonal d'ordre** n et se note $\boldsymbol{\mathscr{S}\mathscr{O}(n)}$ ou $\mathscr{S}\mathscr{O}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{R})$.*
L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 se note $\boldsymbol{\mathscr{O}^-(n)}$.

Proposition 1.25.

- *Si M et N sont deux matrices orthogonales d'ordre n, alors MN est une matrice orthogonale d'ordre n.($\mathscr{O}(n)$ est stable par produit)*
- *Si M est une matrices orthogonale d'ordre n, alors M^{-1} est une matrice orthogonale d'ordre n.*
  $\mathscr{O}(n)$ est stable par passage à l'inverse.
- *Si M et N appartiennent à $\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ alors :*

$$MN \in \mathscr{S}\mathscr{O}(n) \text{ et } M^{-1} \in \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$$

  $\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ est stable par produit et passage a l'inverse.
- *Si M appartient à $\mathscr{O}^-(n)$ alors $M^{-1} \in \mathscr{O}^-(n)$.*
  ($\mathscr{O}^-(n)$ est stable par passage à l'inverse)

Preuve :

Remarque 1.26. *$\mathcal{O}^-(n)$ n'est pas stable par produit :*
si $M \in \mathcal{O}^-(n)$ et $N \in \mathcal{O}^-(n)$ alors

$$\det(MN) = \det(M)\det(N) = (-1) \times (-1) = 1$$

, donc $MN \in \mathcal{SO}(n)$.

1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

Proposition 1.27. *Soit f un endomorphisme de E. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une isométrie ;*
2. *il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice associée à f est une matrice orthogonale ;*
3. *la matrice associée à f dans toute base orthonormée est une matrice orthogonale.*

Remarque 1.28. *Attention il est très important que la matrice associée à f soit relative à une base orthonormée !*

Méthode 1.29. *Cette propriété nous donne une méthode supplémentaire pour montrer qu'un endomorphisme donné est une isométrie : il suffit de montrer que sa matrice dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.*

Corollaire 1.30. *Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors* $\det(f) \in \{-1; 1\}$.

Preuve :

Définition 1.31.
- *L'ensemble des isométries vectorielles dont le déterminant vaut 1 se note $\mathscr{S}\mathscr{O}(E)$ et est appelé **groupe spécial orthogonal** ou encore groupe des isométries positives.*
- *Une isométrie positive s'appelle aussi une **rotation**.*
- *L'ensemble des isométries vectorielles dont le déterminant vaut -1 (aussi appelés isométries négatives) se note $\boldsymbol{\mathscr{O}^-(E)}$.*

Proposition 1.32. *Soit $f \in \mathscr{L}(E), \mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$.*
Si A est une matrice orthogonale et symétrique alors f est la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(f - \mathrm{id}_E)$.

Preuve :

- Comme A est une matrice orthogonale et symétrique on a :
$$A \times A = A^T \times A = I_n.$$
Ainsi on a $f \circ f = \mathrm{id}_E$, ce qui signifie que f est une symétrie vectorielle.
- Un symétrie vectorielle est une symétrie par rapport à $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\ker(f + \mathrm{id}_E)$.
Pour montrer que f est une symétrie orthogonale il nous reste à montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.
Soit $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $\vec{y} \in \ker(f + \mathrm{id}_E)$. On a donc $f(\vec{x}) = \vec{x}$ et $f(\vec{y}) = -\vec{y}$. Cela nous permet d'écrire :
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}) \mid -f(\vec{y}) \rangle = -\langle f(\vec{x}) \mid f(\vec{y}) \rangle = -\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$$
Pour la dernière égalité on a utilisé le fait que f est une isométrie car sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.
On a donc $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ et ainsi $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 0$.
On a donc bien montré que $\ker(f - \mathrm{id}_E) \perp \ker(f + \mathrm{id}_E)$.

En conclusion on a bien montré que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(f - \mathrm{id}_E)$.

Remarque 1.33. ***Attention ! ! !*** *Si la matrice de f est uniquement symétrique on ne peut pas dire que f est une symétrie !.*

2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3

2.1 Orientation d'un espace vectoriel

Définition 2.1. *On considère un espace euclidien et on choisit une base orthonormée $\mathscr{B}$ que l'on appelle base de référence.*
Un base orthonormée $\mathscr{B}'$ est alors dite ***directe*** *lorsque* $\det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) > 0$.
Dans le cas contraire la base $\mathscr{B}'$ est dite ***rétrograde*** *ou* ***indirecte****.*
Lorsqu'on choisit la base de référence on dit que l'on ***oriente*** *E.*

Remarque 2.2. *Lorsque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une matrice orthogonale donc son déterminant vaut 1 et c'est donc une matrice de $\mathscr{SO}(n)$.*
Si $\mathscr{B}'$ est une base rétrograde alors :

$$\det\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right) = -1.$$

2.2 En dimension 2

Dans toute cette partie E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2 .

Théorème 2.3.

- *Soit $A \in \mathscr{SO}(2)$. Alors il existe θ tel que :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- *Soit $A \in \mathscr{O}^-(2)$. Alors il existe θ tel que :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Preuve :

Remarque 2.4. *On note souvent* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *les matrices de* $\mathscr{S}\mathscr{O}(2)$.

Proposition 2.5.

Soient θ et α deux réels. Alors :

$$R(\theta) \times R(\alpha) = R(\theta + \alpha) \text{ et } R^{-1}(\theta) = R(-\theta).$$

Preuve :

Théorème 2.6. *Soit* $f \in \mathscr{S}\mathscr{O}(E)$*. Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de* E *on a :*

$$\mathscr{M}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

On dit alors que f *est la* ***rotation d'angle*** θ.

Remarque 2.7.

Il est important de comprendre que la valeur de θ ne change pas même si on change de base orthonormé directe.

Preuve :

Application 2.8. *Donner la matrice dans la base canonique de la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$.*

Théorème 2.9. *Soit $f \in \mathscr{O}^-(E)$. Alors il existe une base orthonormée de E, notée $\mathscr{B}$, telle que :*

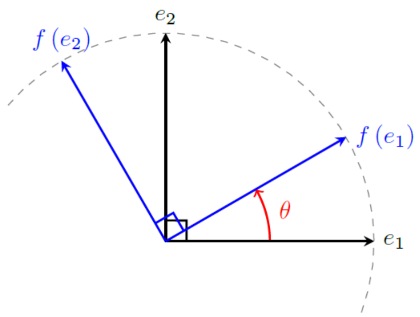
$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

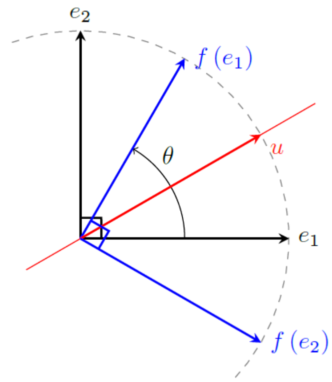
f est donc la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(f - \mathrm{id}_E)$.

Remarque 2.10. *Dans une base orthonormée quelconque de E la matrice de $f \in \mathscr{O}^-(E)$ sera de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ qui changera en fonction de la base choisie.*
Le théorème affirme qu'en choisissant bien la base orthonormée la matrice de f sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Application 2.11. *Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta = Vect((1;2))$.*

Méthode 2.12. *Étude d'une matrice de $\mathscr{O}(2)$*





On dispose d'une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
L'énoncé nous demande de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

1. *Vérifier que A est une matrice orthogonale : les colonnes forment une famille orthonormée ou les lignes forment une famille orthonormée ou encore $A^T A = I_2$.*
2. ***Nature de f :***
   (a) *Si A est une matrice symétrique alors f est une symétrie orthogonale.*
   (b) *Si A n'est pas une matrice symétrique f est une rotation vectorielle.*
3. ***Éléments caractéristiques :** on ne traite que le point correspondant à la nature trouvée pour f.*
   (a) *On cherche les invariants de f :*
   $$f((x,y)) = (x,y) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots$$
   Donc $\ker(f - \mathrm{id}_E) = \dots.$
   (b) *Il nous faut l'angle de la rotation :*
   on sait que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *donc on peut trouver θ.*
4. ***Conclusion :** encore une fois on ne prend en compte que le point correspondant à la nature trouvée pour f.*
   (a) *f est la symétrie orthogonale par rapport à... (on met ce que l'on a trouvé pour les invariants de f)*
   (b) *f est la rotation vectorielle d'angle ... (on met ce que l'on a trouvé pour θ)*

Application 2.13. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Application 2.14. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.3 En dimension 3

Dans cette partie E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3.

Théorème 2.15.
- *Soit $f \in \mathscr{SO}(E)$. Alors il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et un réel θ tels que :*

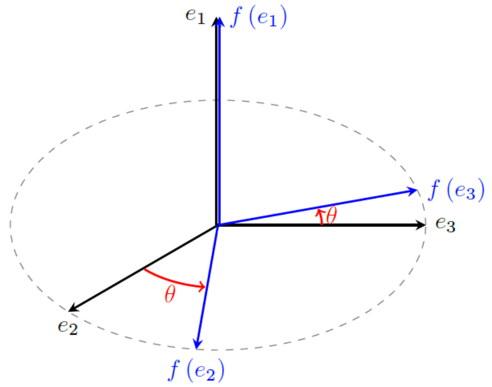
$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

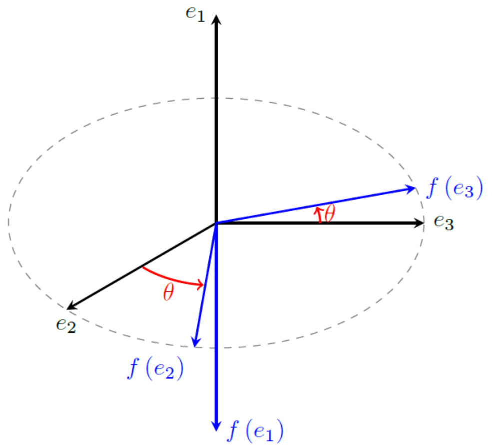
*On dit que f est la **rotation d'axe dirigé par** e_1 **d'angle** θ.*

- *Soit $f \in \mathscr{O}^-(E)$. Alors il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et un réel θ tels que :*

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f est alors la composée de la rotation d'axe dirigé par e_1 d'angle θ et de la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{vect}\,(e_1))^\perp$.





Remarque 2.16.

- Lorsque $f \in \mathscr{SO}(E)$ et $\theta = \pi, f$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle vect (e_1).
- Lorsque $f \in \mathscr{O}^-(E)$ et $\theta = 0, f$ est tout simplement la symétrie orthogonale par rapport au plan $(Vect\,(e_1))^\perp$.
- Lorsque $f \in \mathscr{O}^-(E)$ et $\theta = \pi$, on a $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = -I_3$ et donc $f = -id_E$.

Application 2.17. *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation vectorielle d'axe Δ dirigé par $u = (2; -1; 1)$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.*

Application 2.18. *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la symétrie orthogonale par rapport à $F = \{(x; y; z), -x + y + 2z = 0\}$.*

Théorème 2.19. *Soit $A \in \mathscr{O}(3)$. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que :*

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad P^T AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Méthode 2.20. *Étude d'une matrice de $\mathscr{O}(3)$ On dispose d'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. L'énoncé nous demande de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.*

1. ***Vérifier que A est une matrice orthogonale :*** *les colonnes forment une famille orthonormée ou les lignes forment une famille orthonormée ou encore $A^T A = I_3$.*
2. ***Nature de f :***
   (a) *Si la matrice A est symétrique f est une symétrie orthogonale.*
   (b) *Si A n'est pas une matrice symétrique et $A \in \mathscr{SO}(3)$ (pour déterminer cela deux méthodes : on vérifie que $\det(A) = 1$ ou que $C_1 \wedge C_2 = C_3$) alors f est une rotation vectorielle.*

(c) *Si A n'est pas une matrice symétrique et $A \in \mathscr{O}^-(3)$ (pour déterminer cela deux méthodes : on vérifie que $\det(A) = -1$ ou que $C_1 \wedge C_2 = -C_3$) alors f est la composée d'une rotation vectorielle et d'une symétrie orthogonale.*

3. ***Éléments caractéristiques :***
on ne traite que le point correspondant à la nature trouvée pour f.
   (a) *On cherche les invariants de f :*
   $$f((x,y,z)) = (x,y,z) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots$$
   Donc $\ker(f - \mathrm{id}_E) = \dots$
   (b) *Il nous faut dans ce cas l'axe de la rotation et l'angle.*
   - *Pour trouver l'axe on cherche les invariants de f :*
   $$f((x,y,z)) = (x,y,z) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots$$
   Donc $\ker(f - \mathrm{id}_E) = \dots = \mathrm{vect}(\vec{u})$.
   - *Pour trouver l'angle on utilise deux informations : On sait que $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc on peut trouver facilement $\cos(\theta)$. On choisit un vecteur $\vec{x}$ non colinéaire à $\vec{u}$ (en pratique on prend souvent un des vecteurs de la base canonique que $\mathbb{R}^3$) et on admet que $\sin(\theta)$ est du même signe que $\det_{\mathscr{B}c}(\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x}))$ Avec les informations sur $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ on peut donner θ (à 2π près évidemment...)*

   (c) *Il nous faut ici l'axe de la rotation, l'angle et l'ensemble par rapport auquel on fait la symétrie orthogonale :*
   - *On applique la méthode précédente à $-A$: on trouve un axe vect $(\vec{u})$ et un angle θ. La rotation qui compose f est alors la rotation d'axe vect $(\vec{u})$ et d'angle $\theta + \pi$.*
   - *La symétrie orthogonale qui compose f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathrm{vect}(\vec{u}))^\perp$.*

4. ***Conclusion :*** *on ne traite que le point correspondant à la nature trouvée pour f.*
   (a) *f est la symétrie orthogonale par rapport à ... (ce qu'on a trouvé pour les invariants).*
   (b) *f est la rotation vectorielle d'axe ... (ce qu'on a trouvé pour les invariants) et d'angle ...(ce qu'on a trouvé pour θ).*

(c) *f est la composée de la la rotation vectorielle d'axe ... (ce qu'on a trouvé pour les invariants de $-f$) et d'angle ... (ce qu'on a trouvé pour $\theta + \pi$) et de la symétrie orthogonale par rapport à $(\ldots)^{\perp}$ (à la place des pointillés on met les invariants de $-f$).*

Remarque 2.21.
- *Lorsque f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, on dit aussi que f est un demi-tour par rapport à la droite $E_1(f)$.*
- *Lorsque f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, on dit aussi que f est une réflexion par rapport au plan $E_1(f)$.*

Application 2.22. *Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Application 2.23. *Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Application 2.24. *Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

3 Matrices symétriques

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X \mid Y \rangle = X^T Y$.

Proposition 3.1. *Soit A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
Alors les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Preuve :

Théorème 3.2. ***Théorème spectral***
Soit A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^T \iff D = P^{-1}AP = P^TAP$$

Autrement dit :

"Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée"

Remarque 3.3. *Pour diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée il faut donc faire très attention au choix des vecteurs propres : il faut qu'ils forment une base orthonormée pour que la matrice de passage soit orthogonale.*

Application 3.4. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
Diagonaliser A selon une base orthonormée.