TD 15 - Découverte du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère (que nous démontrerons en cours) est

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacés}} \tag{1}$$

Nous allons voir dans ce TD les notions mathématiques liées à cette expression pour l'apprivoiser.

1 Contour fermé et courant enlacé

Définition : Un contour fermé $\mathcal{C}$ est une ligne **orientée** qui boucle sur elle même. Un contour fermé définit ainsi une surface $\vec{S}$ qu'il entoure. L'orientation du contour fermé $\mathcal{C}$ oriente la surface S selon la règle de la main droite.

1. Reproduire sur votre feuille les contour fermés de la figure 1. Décrire dans chaque cas la surface S entourée par ces contours fermés et l'orienter. Donner le vecteur unitaire que porte la surface $\vec{S}$ dans les deux cas.

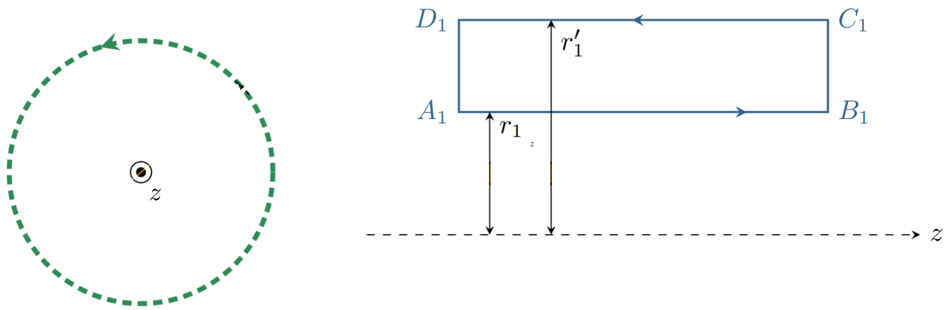

Figure 1: Exemple de contour fermé. On appelle celui de droite le contour 1 $\mathcal{C}_\infty$ et celui de gauche le contour 2 $\mathcal{C}_\in$.

2. Pour le contour $\mathcal{C}_1$, en coordonnées cylindriques donner l'expression de $\mathrm{d}\vec{l}$ l'élément de longueur infinitésimal le long de ce contour.

3. Faire de même pour les quatre tronçons A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 et A_4B_4 du contour $\mathcal{C}_2$.

Définition : Soit une grandeur vectorielle $\vec{A}$. On définit la *circulation* de $\vec{A}$ dans $\mathcal{C}$ comme l'intégrale de $\vec{A}$ le long de $\mathcal{C}$, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

4. En coordonnées cylindriques (r, θ, z) on considère une grandeur vectorielle $\vec{A} = A(r)\vec{e}_\theta$. Calculer

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{et} \quad \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{2}$$

Définition : On appelle *courants enlacés* $I_{\text{enlacés}}$ la somme algébrique des courants enlacés par un contour fermé $\mathcal{C}$. Le signe est donné par l'orientation respective du courant et de la surface engendrée par le contour fermé.

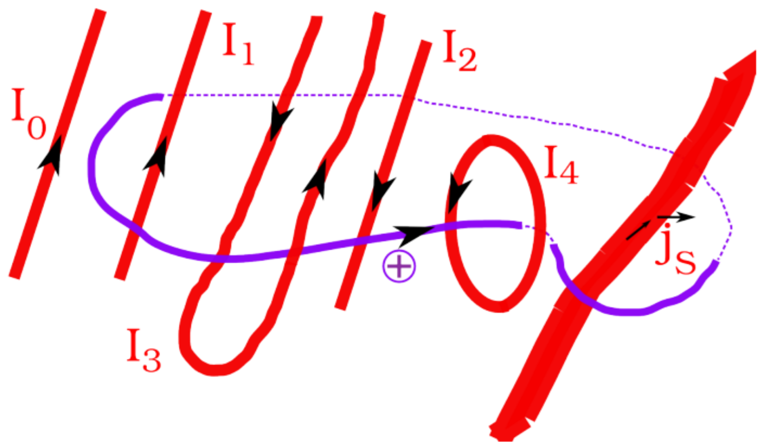

Figure 2: Exemple de courants enlacés dans un contour fermé $\mathcal{C}$. On notera S_a la section du tube contenant la densité volumique de courant $\vec{j}_S$.

5. Calculer $I_{\text{enlacés}}$ dans le cas présenté sur la figure 2.

2 Symétries du champ magnétique

Propriétés :

- Le champ magnétique créé en un point M d'un plan de symétrie (Π) d'une distribution de courants est orthogonal à ce plan.
- Le champ électrique créé en un point M d'un plan d'antisymétrie (Π^*) d'une distribution de courants est contenu dans ce plan.

Pour déterminer l'orientation du champ magnétique en un point on a ainsi besoin de deux plans d'antisymétrie ou d'un plan de symétrie.

Pour les invariances, c'est la même chose que pour le champ électrique : si la distribution de courant est invariante selon une transformation impliquant une coordonnée, la champ $\vec{B}$ ne dépend pas de cette coordonnée.

1. Pour un fil infini d'axe Oz parcouru par un courant I uniforme, étudier les symétries et les invariances de la distribution de courant montrer que

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e_\theta} \tag{3}$$

2. Pour un solénoïde (une bobine) infini, schématisé sur la figure 3, étudier les symétries et invariances de la distribution de courant et montrer que

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z \tag{4}$$

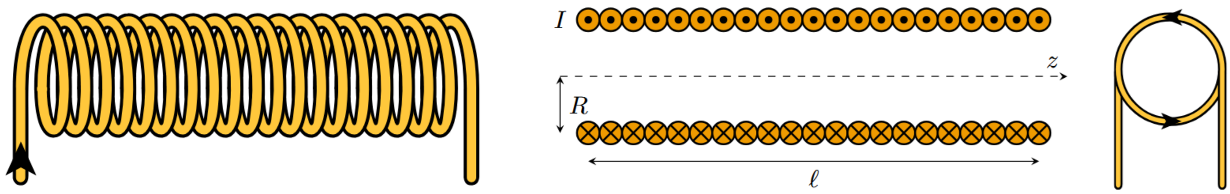

Figure 3: Schéma du solénoïde supposé infini.

3 Premières applications

Méthode générale La méthode à suivre pour déterminer l'expression d'un champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère est très similaire à celle utilisée pour le théorème de Gauss.

- On schématise la distribution de courant et on choisit le système de coordonnées en conséquence.
- On analyse les symétries et les invariances pour simplifier l'expression de $\vec{B}$.
- On choisit le contour adapté : idéalement le champ magnétostatique est constant et tangent à ce contour.
- On calcule la circulation du champ magnétostatique le long de ce contour, puis les courants enlacés.
- On applique enfin le théorème d'Ampère pour déduire l'expression de $\vec{B}$.

Faire attention à :

- Bien compter algébriquement les courants enlacés, le signe étant donné par l'orientation du contour choisi.
- Ne pas oublier le μ_0 dans la formule.

1. Appliquer cette méthode à l'exemple du fil infini d'axe Oz parcouru par un courant I uniforme pour montrer que
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta \tag{5}$$
2. Faire de même pour un câble (cylindre) de rayon R d'axe Oz parcouru par la densité volumique de courant $\vec{j} = j\vec{e}_z$ uniforme et montrer que
   - Si $r < R$
   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2}\vec{e}_\theta \tag{6}$$
   - Si $r > R$
   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta \tag{7}$$