# Programme de khôlle 17
Semaine du 2 février 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Question de cours et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***coeff_fourier(n)*** qui renvoie la liste des $n$ premiers coefficients de Fourier de la fonction $2-$ périodique et impaire valant $1-x$ sur $]0;1]$.
2. ***serie_partielle(N,x)*** qui reçoit en argument un entier naturel non nul $N$ ainsi qu'un flottant $x$ et qui renvoie $S_N(f)(x)$, la somme partielle de Fourier évaluée en $s$ de la fonction $f$ définie dans la question précédente (on fera directement appel à cette fonction).
3. ***comparaison(N)*** qui reçoit en argument un entier naturel non nul $N$ et qui trace dans un même repère les courbes de $S_N(f)$ et de $f$ sur l'intervalle $[-1;1]$.

## 2 Question de cours

1. Loi, espérance et variance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ avec démonstration.
2. Loi et espérance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique avec démonstration.
3. Loi, espérance et variance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ avec démonstration.

## 3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 3.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.*

1. *On suppose dans cette question que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ avec $p \in ]0;1[$.*

(a) *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(X > n)$.*

(b) *Montrer que pour tout $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ :*

$$P_{[X>k]}([X > k + \ell]) = P([X > \ell]).$$

2. *Réciproquement, on suppose, dans cette question, que $X$ vérifie la relation :*

$$\forall (k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P_{[X>k]}([X > k + \ell]) = P([X > \ell]).$$

*On suppose aussi que $P(X = 1) \in ]0; 1[$.*

(a) *Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :*

$$P(X > k + 1) = P(X > k)P(X > 1).$$

(b) *En déduire par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X > n) = (1 - P(X = 1))^n.$$

(c) *Montrer alors que $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p = P(X = 1)$.*

**Exercice 3.2.** *On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et donc celle d'obtenir face est $1/3$.*
*Les lancers sont supposés indépendants, et on note $X$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note $p_n$ la probabilité $P(X = n)$.*

1. *Expliciter les événements $(X = 2), (X = 3), (X = 4)$, et déterminer la valeur de $p_2, p_3, p_4$.*
2. *Montrer que l'on a $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}, n \geq 4$.*
3. *En déduire l'expression de $p_n$ pour tout $n$.*
4. *Rappeler, pour $q \in ]-1, 1[$, l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$, et calculer alors $E(X)$. Interpréter.*

**Exercice 3.3.** *On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage $A$ et $B$ qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.*
*On suppose que $A$ produit $60\%$ des objets et $B$ produit $40\%$ des objets.*
*La probabilité qu'un objet construit par la chaine $A$ soit défectueux est $0,1$ alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine $B$ soit défectueux est $0,2$.*

1. *On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux.*
*Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine $A$".*

2. *On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par $A$ est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire $X$ représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure.*
   (a) *Rappeler la loi de $Y$ ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de $Y$.*
   (b) *Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k \mid Y = n)$.(On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$ ).*
   (c) *En déduire, en utilisant le système complet d'événements $([Y = i])_{i \in \mathbb{N}}$, que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre 2 .*

**Chap.12 : Variables aléatoires réelles discrètes**

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes
1.1 Définition, propriétés
1.2 Loi d'une VAR discrète
1.3 Fonction de répartition
1.4 Fonction d'une variable aléatoire

2 Moments d'une VAR discrète
2.1 Espérance
2.2 Variance et écart type

3 Lois discrètes usuelles
3.1 Lois discrètes finies
3.1.1 Loi de Bernoulli
3.1.2 Loi binomiale
3.1.3 Loi uniforme
3.2 Lois discrètes infinies
3.2.1 Loi géométrique
3.2.2 Loi de Poisson
3.3 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

**Chap.13 : Séries de Fourier**

1 Fonctions T-périodiques
1.1 Définition
1.2 Régularité
1.3 Intégration

2 Séries de Fourier
2.1 Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues
2.2 Coefficients de Fourier
2.2.1 Définition
2.2.2 Cas particuliers
2.3 Série de Fourier

3 Les théorèmes de convergence
3.1 Théorème de Dirichlet
3.2 Théorème de Parseval