Exercices de colle - Magnétostatique

1 Fil et bobine

Une ligne à haute tension modélisée comme un fil infini d'axe (Oz) transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence 50 Hz et d'amplitude $I = 1{,}0\,\mathrm{kA}$. On considère que la fréquence d'oscillation du courant est assez faible pour que le théorème d'Ampère reste vrai. On approche une bobine plate de N spires carrées de coté $a = 30\,\mathrm{cm}$ à une distance $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ de la ligne à haute tension (figure 1). On considère que la bobine a une résistance et une inductance négligeable (on néglige donc le champ magnétique qu'elle crée). Cette bobine est fermée sur une ampoule qui éclaire si l'amplitude de la tension à ses bornes est supérieure à 1,5 V.

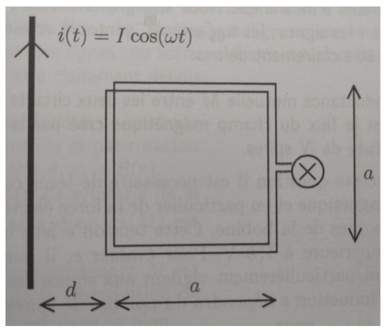

Figure 1: Schéma du problème considéré

1. Par une utilisation soignée du théorème d'Ampère, déterminer le champ $\vec{B}$ crée par le fil infini.
2. Calculer le flux $\Phi = N \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ du champ magnétique à travers la bobine carrée.
3. On rappelle la loi de Faraday donnant la force électromotrice induite
$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$
Calculer le nombre de spires N nécessaires pour que la lampe s'allume.

2 Champ magnétique créé par un solénoïde infini

On considère un solénoïde de longueur l qu'on considérera infinie, parcouru par un courant I et comportant N spires (figure 2). On cherche à déterminer le champ $\vec{B}$ créé par cette bobine. On néglige l'épaisseur des spires.

1. Donner l'expression de n la densité linéique de spires.
2. Montrer que le champ $\vec{B}$ est de la forme
$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_z \tag{2}$$
3. Par une première utilisation du théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi, montrer que le champ à l'extérieur de la bobine est constant. On supposera par la suite qu'il est nul.

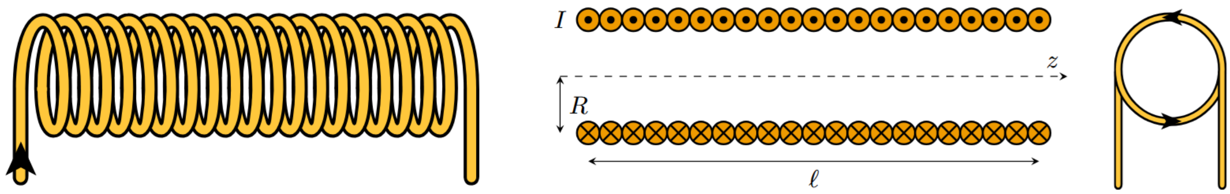

Figure 2: Schéma du solénoïde infini

4. Expliquer rapidement comment montrer que le champ intérieur à la bobine est également constant.
5. Déterminer finalement l'expression du champ magnétique créé à l'intérieur de la bobine.
6. Calculer le flux propre Φ_p, flux du champ magnétique créé par la bobine à travers cette même bobine.
7. En déduire la valeur de l'inductance L de cette bobine.

3 Câble parcouru par un courant inhomogène

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j}$ répartie de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}(r) = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z \tag{3}$$

1. Exprimer J_0 en fonction de I, le courant traversant le câble.
2. Par une application soignée du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créé en tout point de l'espace par ce câble.
3. Tracer B en fonction de r.
4. Montrer que le champ $\vec{B}$ trouvé satisfait bien l'équation de Maxwell-Ampère.

   Données : Expression de l'opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \tag{4}$$