

# Devoir surveillé n°4 - Thermodynamique industrielle & Electrostatique

Durée 4 heures - Calculatrices autorisées

Ce problème est composé de 3 parties indépendantes

Des données numériques et des formules sont données en fin d'énoncé.

N'oubliez pas de rendre les documents réponses A et B avec votre copie

## 1 Différentes machines frigorifiques

### 1.1 Machine frigorifique à absorption

De l'avis de l'historien Hugo Obermaier (1877–1946), dès le paléolithique inférieur (100 000 ans avant Jésus-Christ), les hommes ont commencé à utiliser le froid existant dans les grottes pour conserver le gibier. Sans comprendre ces phénomènes, ces hommes utilisaient sans doute l'abaissement de température produit en partie par l'évaporation de l'eau, en partie par la détente de l'air dans les crevasses communiquant avec l'extérieur.

**Q 1.** À partir de considérations simples, expliquer ces deux hypothèses. On pourra raisonner sur l'humidité de l'air et préciser le modèle de détente.

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, des procédés d'obtention de froid artificiel ont vu le jour. La première machine à atteindre une importance industrielle généralisée fut celle du français Ferdinand Carré qui, en 1859, déposa un brevet pour un réfrigérateur à absorption utilisant l'ammoniac comme fluide frigorigène. Son principe est schématisé figure 1.

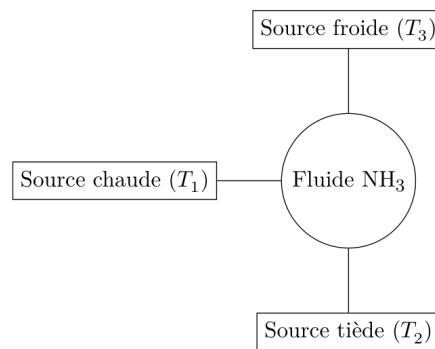


FIGURE 1

Une réfrigérateur à absorption est un récepteur thermique fonctionnant par contact avec trois « thermostats », sans recevoir de travail mécanique. La source chaude à la température  $T_1$  est constituée par le système de chauffage de la machine (un brûleur par exemple). Cette source chaude réchauffe le fluide circulant dans la machine. La source tiède à la température  $T_2$  est

constituée par la salle dans laquelle se trouve la machine. La source froide à la température  $T_3$  est constituée par l'enceinte à refroidir.

On a :

$$T_1 > T_2 > T_3$$

On désigne par  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  les transferts thermiques reçus par le fluide au cours d'un cycle de la machine, respectivement lors des contacts avec les sources chaude, tiède et froide.

**Q 2.** Déterminer les signes des transferts thermiques  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$ . On pourra s'aider du premier principe de la thermodynamique appliqué à l'entièreté du cycle.

**Q 3.** Comparer les valeurs absolues  $|Q_1|$  et  $|Q_2|$ . Commenter.

**Q 4.** Définir le coefficient de performance (noté COP) de cette machine et donner son expression littérale.

**Q 5.** En utilisant les deux principes de la thermodynamique sur un cycle, montrer que

$$\text{COP} \leq \text{COP}_{\text{max}}.$$

Où  $\text{COP}_{\text{max}}$  est le coefficient de performance de Carnot obtenu pour un cycle réversible. On exprimera  $\text{COP}_{\text{max}}$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ .

**Q 6.** Étudier la limite de  $\text{COP}_{\text{max}}$  lorsque la température  $T_1$  du système de chauffage de la machine devient très grande. Interpréter l'expression obtenue.

**Q 7.** Quel avantage de ce type de machine peut-on prévoir par rapport à une machine à compression de fluide ?

À partir de 1885, le système à compression de vapeurs liquéfiables commença à prendre le net avantage qui est devenu éclatant au cours du XX<sup>e</sup> siècle.

## 1.2 Machine frigorifique à compression de vapeur

On considère une machine frigorifique constituée d'un compresseur, d'un condenseur, d'un détendeur et d'un évaporateur, dans lesquels circule un fluide frigorigène R134a.

**Q 8.** Sur un schéma de principe, identifier les différents transferts énergétiques qui interviennent au sein de la machine entre les différents éléments schématisés figure 2 et donner leur signe.

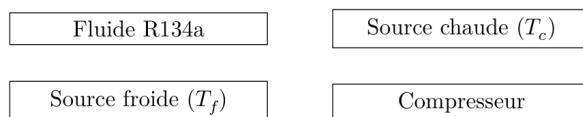


FIGURE 2

**Q 9.** Quel est le rôle du condenseur et au contact de quel élément de la figure 2 doit-il être mis ?

**Q 10.** Quel est le rôle de l'évaporateur et au contact de quel élément doit-il être mis ?

**Q 11.** Définir le coefficient de performance (COP) de cette machine puis exprimer le coefficient de performance de la machine de Carnot correspondante.

**Q 12.** Rappeler l'expression du premier principe industriel pour un fluide en écoulement stationnaire dans un système ouvert à une entrée et une sortie. On notera  $h$  l'enthalpie massique,  $e_c$  et  $e_p$  les énergies cinétique et potentielle massiques,  $w_i$  le travail indiqué massique reçu de la part des parties mobiles et  $q$  le transfert thermique massique reçu.

**Q 13.** Établir ce premier principe industriel à l'aide d'un bilan sur un système fermé que l'on définira précisément.

Pour toute la suite, on néglige toute variation d'énergie cinétique massique et d'énergie potentielle massique. De plus, on suppose un régime d'écoulement permanent au débit massique

$$D_m = 0.2 \text{ kg s}^{-1}.$$

Pour simplifier, on considère la compression adiabatique et réversible. Le détendeur D, calorifugé et sans parties mobiles, permet une chute de pression. L'évaporateur EV et le condenseur CD sont des échangeurs thermiques isobares ne comportant pas de parties mobiles. Les notations des états du fluide sont précisées sur la figure 3.

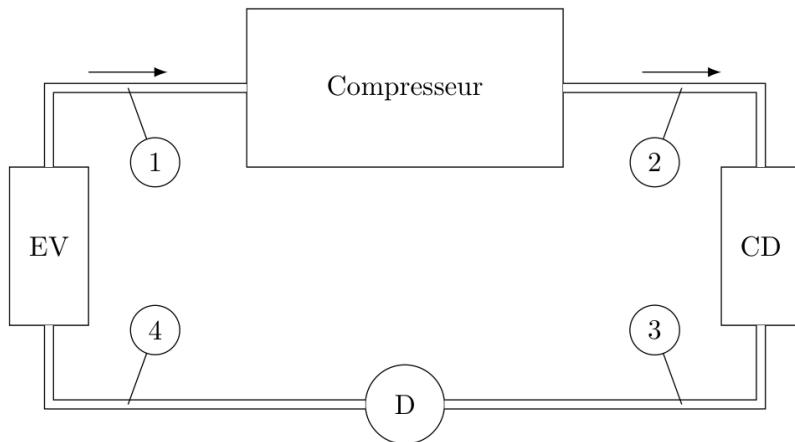


FIGURE 3

**Q 14.** Montrer que le fluide subit une détente isenthalpique dans D.

La figure 6 (document réponse B) représente l'allure du cycle décrit par le fluide dans le diagramme dit « des frigoristes » enthalpie massique  $h$  (en  $\text{kJ kg}^{-1}$ ) en abscisse, pression  $P$  (en bar) en ordonnée, avec échelle logarithmique. Aucune connaissance préalable de ce diagramme n'est requise. Seul le point 1, à l'entrée du compresseur, est mentionné sur ce diagramme.

**Q 15.** En repérant la courbe de saturation, noter sur le diagramme (document réponse B) les domaines où le fluide est à l'état liquide, vapeur, ou mélange liquide-vapeur.

**Q 16.** Dans quel sens est parcouru le cycle ?

**Q 17.** Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ? Justifier.

**Q 18.** Quelle est la forme des isothermes dans le domaine de la vapeur ? Justifier lorsque l'on peut assimiler la vapeur à un gaz parfait.

**Q 19.** Porter le numéro de chaque état du fluide (2, 3 et 4) dans chaque case prévue.

**Q 20.** Noter sur le diagramme, pour chacune des quatre transformations, la nature de la transformation et l'organe (compresseur, condenseur, détendeur, évaporateur) traversé par le fluide.

**Q 21.** Compléter le tableau du document réponse A en s'aidant du diagramme.

**Q 22.** Exprimer, puis calculer, le travail massique indiqué  $w_{ic}$  reçu par le fluide dans le compresseur.

**Q 23.** Exprimer, puis calculer, le transfert thermique massique  $q_f$  reçu par le fluide dans l'évaporateur.

**Q 24.** En utilisant le débit massique, exprimer puis calculer la puissance frigorifique  $P_f$  de cette machine.

**Q 25.** Exprimer, puis calculer, le coefficient de performance de cette installation frigorifique. Le comparer au coefficient de performance de la machine de Carnot correspondante et interpréter la différence observée.

**Q 26.** On souhaite améliorer la puissance frigorifique de 5 % en sous-refroidissant jusqu'à  $T'_3$  le fluide lors de la condensation isobare. En déduire  $h'_3$  et placer le point 3' sur le diagramme. En déduire  $T'_3$  et la valeur du sous-refroidissement  $\Delta T$ .

## 2 Pluviomètre capacitif

La mesure des précipitations sur un territoire est importante pour prévoir l'évolution du débit de ses cours d'eau, et gérer de manière optimale les ressources en eau. Le volume de précipitations est généralement mesuré à l'aide d'un réseau de pluviomètres répartis sur le territoire, qui déterminent localement la hauteur d'eau tombée au sol par unité de surface pendant un intervalle de temps donné. Parmi les différents types de pluviomètre qui existent, nous allons étudier dans cette partie le fonctionnement d'un pluviomètre capacitif, qui est basé sur la mesure d'une capacité électrique.

Le pluviomètre capacitif est modélisé par un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales d'axe ( $Oz$ ) et de hauteur  $H = 5.00$  m, comme représenté sur la figure 4 :

- l'armature intérieure de rayon  $a_1$  est portée au potentiel  $V_1$  et possède une charge  $Q > 0$  répartie sur sa surface ;
- l'armature extérieure de rayon  $a_2$  est portée au potentiel  $V_2$  (avec  $V_2 < V_1$ ) et possède une charge  $-Q$  répartie sur sa surface.

On néglige les effets de bords dans cette étude, ce qui revient à considérer que la hauteur des cylindres est infinie lors de la détermination du champ électrique. On considère le système de coordonnées cylindriques de repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

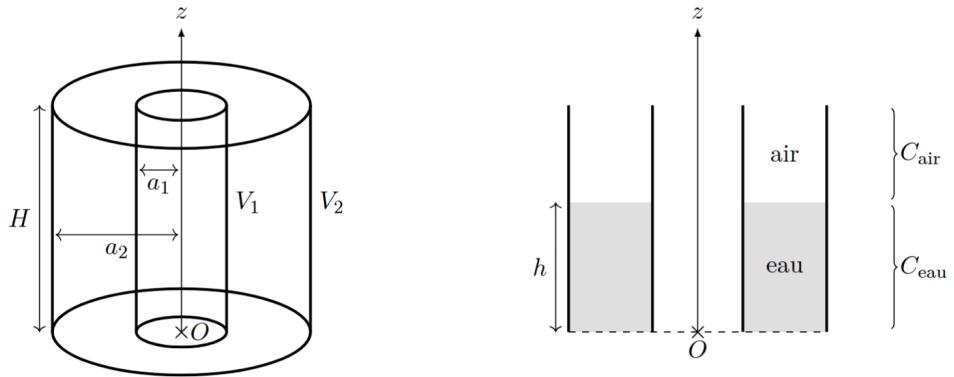


FIGURE 4- Pluviomètre capacitif en l'absence d'eau (à gauche), et sa vue de coupe en présence d'eau (à droite).

Dans un premier temps, on étudie le pluviomètre en l'absence d'eau (figure 4 à gauche). L'espace entre les deux armatures est alors rempli d'air, que l'on assimile au vide.

**Q 27.** Justifier, de façon rigoureuse, que le champ électrique en tout point de l'espace s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r.$$

**Q 28.** Exprimer  $\sigma$ , la charge surfacique portée par l'armature intérieure en fonction de  $Q$ ,  $a_1$  et  $H$ .

**Q 29.** À l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'expression de  $E(r)$  entre les deux armatures ( $a_1 < r < a_2$ ) en fonction des données de l'énoncé.

**Q 30.** À l'aide du théorème de Gauss, déterminer également la valeur de  $E(r)$  pour  $r < a_1$  et pour  $r > a_2$ .

**Q 31.** Tracer  $E(r)$  en fonction de  $r$ . Le champ électrique est-il continu en  $r = a_1$  et  $r = a_2$  ?

On rappelle que l'on définit la capacité d'un condensateur par la relation

$$Q = CU \quad (1)$$

où  $U > 0$  est la différence de potentiel entre l'armature de charge positive et l'armature de charge négative.

**Q 32.** Exprimer la capacité  $C_0$  du condensateur en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$  et  $Q$ .

**Q 33.** À l'aide de l'expression de  $E(r)$ , déterminer l'expression de  $V_1 - V_2$  en fonction de  $Q$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $H$  et  $\epsilon_0$ .

**Q 34.** En déduire l'expression de  $C_0$  en fonction de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $H$  et de la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$ .

On étudie maintenant le pluviomètre en présence d'eau (figure 4 à droite). Celui-ci étant posé verticalement sur le sol, il s'est rempli progressivement d'eau lorsque de la pluie est tombée dans

l'espace entre ses deux armatures cylindriques. On note  $h$  la hauteur d'eau qu'il contient à la fin d'une averse.

L'eau étant un milieu diélectrique caractérisé par sa permittivité diélectrique  $\varepsilon$ , on peut montrer que le théorème de Gauss reste valable dans un tel milieu à condition de remplacer  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon$ .

**Q 35.** Justifier que la capacité du condensateur en présence d'eau peut s'exprimer comme la somme :

$$C = C_{\text{eau}} + C_{\text{air}},$$

où  $C_{\text{eau}}$  est la capacité de la partie du condensateur contenant de l'eau ( $0 < z < h$ ), et  $C_{\text{air}}$  la capacité de la partie contenant de l'air ( $h < z < H$ ).

**Q 36.** En déduire que la capacité du condensateur peut s'exprimer sous la forme :

$$C(h) = C_0 (Ah + B),$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes que l'on exprimera en fonction de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  et  $H$ .

**Q 37.** Que devient cette expression pour  $h = 0$ ? Est-ce logique?

**Q 38.** La capacité  $C(h)$  est ensuite mesurée à l'aide d'un capacimètre. La résolution du capacimètre est d'environ 5 %, c'est à dire qu'il ne détecte une variation de  $C(h)$  que lorsque  $C(h)$  atteint  $C(h) = 1,05C_0$ . Déterminer la valeur numérique de la hauteur d'eau  $h$  pour laquelle on détecte une première variation de la capacité du condensateur. Notre pluviomètre capacitif est-il un dispositif précis?

### 3 Accélérateur de particules

Un accélérateur de particules est un instrument qui utilise des champs électriques et/ou magnétiques pour amener des particules chargées électriquement à des vitesses élevées. Le LHC, le « Large Hadron Collider » (grand collisionneur de hadrons) est situé en périphérie de Genève et accélère des protons de charge  $+e$  jusqu'à des vitesses extrêmement élevées, très proches de la vitesse  $c$  de la lumière. Nous allons voir dans cette partie quelques aspects liés à l'accélération de protons.

#### 3.1 Premier modèle

**Q 39.** Rappeler l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  d'une particule de charge  $q$  plongée dans le potentiel électrostatique  $V$ .

**Q 40.** Calculer la valeur numérique de l'énergie cinétique  $E_c$  d'un proton accéléré à la vitesse  $v_f = 0,99 c$ .

Un dispositif possible pour accélérer un proton est de placer deux électrodes planes, distantes de  $d$ . On considère que le proton est initialement au repos (vitesse nulle) au niveau de la première électrode de potentiel  $V_1$ . On note le potentiel de la seconde électrode  $V_2$  et  $\Delta V = V_1 - V_2 > 0$  la différence de potentiel entre les deux électrodes. On place l'axe  $x$  orthogonal aux électrodes, la première électrode étant donc en  $x = 0$  et la seconde en  $x = d$ .

**Q 41.** Faire un schéma du dispositif décrit dans le paragraphe précédent.

On suppose que la seule force que subit l'électron est la force électrostatique à laquelle l'énergie potentielle  $E_p$  est associée.

**Q 42.** Utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour donner l'expression de la vitesse  $v_f$  que le proton atteint lorsqu'il arrive à la seconde électrode en fonction de  $e$ ,  $m_p$  et  $\Delta V$ .

**Q 43.** Donner la valeur numérique de  $\Delta V$ , la tension que l'on doit appliquer entre les deux électrodes si l'on souhaite que le proton atteigne une vitesse finale  $v_f = 0,99 c$ .

**Q 44.** On suppose que le potentiel électrostatique entre les deux électrodes est de la forme

$$V(x) = ax + b \quad (2)$$

Déterminer  $a$  et  $b$  en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$  et  $d$ .

**Q 45.** Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  entre les deux électrodes.

On suppose que de l'air est présent entre les deux électrodes. La champ disruptif  $E_{\text{dis}}$  d'un milieu isolant représente la valeur maximum du champ électrique que le milieu peut supporter avant le déclenchement d'un arc électrique (c'est ce qui se produit lors d'un éclair). Pour l'air

$$E_{\text{dis}} = 3.6 \times 10^6 \text{ V/m} \quad (3)$$

**Q 46.** Déterminer maintenant la valeur numérique de la distance minimale  $d_{\text{min}}$  à mettre entre les deux électrodes afin qu'il n'y ait pas un arc électrique qui se forme entre elles. Commenter le résultat, cela vous semble-t-il possible en pratique ?

### 3.2 Prise en compte des effets relativistes

La théorie de la relativité restreinte, développée par Albert Einstein en 1905 en vue de réconcilier mécanique classique et électromagnétisme donne lieu (entre autres) à une nouvelle définition de l'énergie cinétique  $E_{c,\text{rel}}$  d'une particule de masse  $m$  et de vitesse  $v$

$$E_{c,\text{rel}} = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (4)$$

**Q 47.** Pour  $v \ll c$ , faire un développement limité à l'ordre 1 de la formule précédente. Commenter le résultat.

**Q 48.** Selon l'expression de  $E_{c,\text{rel}}$ , quelle énergie faudrait-il fournir à une particule afin de l'accélérer jusqu'à la vitesse de la lumière  $c$  ?

**Q 49.** En utilisant cette expression de l'énergie cinétique, calculer l'énergie cinétique  $E_{c,\text{rel}}$  d'un proton atteignant la vitesse  $v_f = 0,99 c$ . En déduire l'expression et la valeur de la tension à appliquer  $\Delta V_{\text{rel}}$  pour accélérer l'électron jusqu'à la vitesse  $v_f$  en prenant en compte les effets relativistes.

**Q 50.** En déduire la valeur  $d_{\text{min, rel}}$  de la distance minimale à mettre entre les deux électrodes pour qu'il n'y ait pas d'arc électrique lorsque la tension appliquée entre elles est  $\Delta V_{\text{rel}}$ . Commenter le résultat.

**Q 51.** Au LHC, les protons sont accélérés jusqu'à  $v_{f,\max} = 0,999\ 999\ 991\ c$ . Refaire les calculs et donner la longueur minimale du LHC si il utilisait la méthode envisagée ici pour accélérer les électrons. Commenter le résultat.

**Données :**

- Constante des gaz parfaits  $R = 8.314\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1}$
- $T(K) = \theta(\text{°C}) + 273$
- Expression de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (5)$$

- Permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
- Permittivité diélectrique de l'eau  $\epsilon = 3.01 \times 10^{-10}\ \text{F/m}$
- Vitesse de la lumière  $c = 3.00 \times 10^8\ \text{m/s}$
- Masse d'un proton  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
- Charge élémentaire  $e = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}$

État du fluide	1	2	3	4
Pression (bar)				
Température (°C)				
Enthalpie massique (kJ·kg <sup>-1</sup> )				
Titre en vapeur				

FIGURE 5- Document réponse A

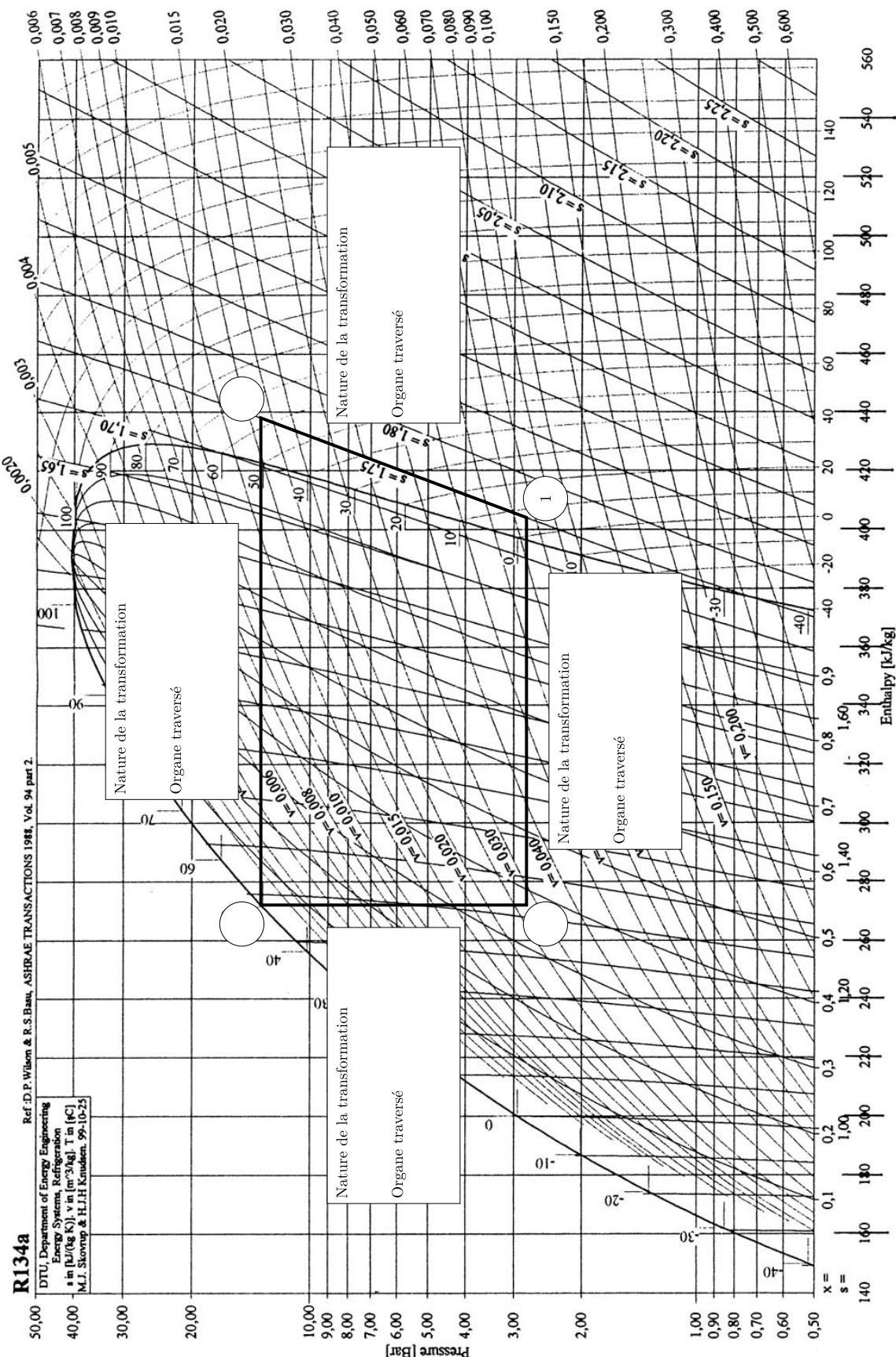


FIGURE 6- Document réponse B