Exercices
Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

1 Isométries, matrices orthogonales

Exercice 1.1. *Soit A une matrice orthogonale. Montrer que* $\mathrm{sp}(A) \subset \{-1; 1\}$.

Exercice 1.2. *Soit E un espace euclidien et f une isométrie de E.*
Montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^{\perp}$.

Exercice 1.3. *Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{O}(E)$.*

1. *On suppose que* $\mathrm{sp}(f) = \{-1; 1\}$.
   Montrer que $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.
2. *On suppose de plus que f est diagonalisable.*
   Montrer que f est une symétrie orthogonale.

2 En dimension 2

Exercice 2.1. *Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :*

1. $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Exercice 2.2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation vectorielle d'angle* $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 2.3. *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la symétrie orthogonale d'axe dirigé par le vecteur* $\vec{u} = (1, 2)$.

Exercice 2.4. *L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique.*

1. *Vérifier que* $\vec{x} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *et* $\vec{y} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *sont des vecteurs unitaires.*
2. *Déterminer la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de l'unique rotation vectorielle f de $\mathbb{R}^2$ telle que* $f(\vec{x}) = \vec{y}$.
   Pour cela on écrira A sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
3. *En déduire la valeur de* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3 En dimension 3

Exercice 3.1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et on note* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* A*.*

1. *Montrer que* A *est une matrice orthogonale.*
2. *Justifier que* f *est une isométrie négative et en déduire la nature de* f*.*
3. (a) *Déterminer un vecteur* $\vec{u}$ *de première coordonnée 1 et tel que :*

   $$\ker\left(-f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$$

   (b) *Déterminer les valeurs de* θ *solutions de* $\mathrm{tr}(-A) = 1 + 2\cos(\theta)$*.*

   (c) *On note* $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Déterminer le signe* de $\det_{\mathscr{A}_c}(\vec{u}, e_1, -f(e_1))$.
   Parmi les valeurs de θ *trouvées à la question précédente quelles sont celles telles que le signe de* $\sin(\theta)$ *est le même que celui du déterminant calculé ci-dessus ?*

   (d) *Donner une équation du plan* $P = \mathrm{Vect}(\vec{u})^{\perp}$*.*
4. *Conclure en donnant la nature et les éléments caractéristiques de* f*.*

Exercice 3.2. *Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à chacune des matrices suivantes :*

1. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3.3. *On reprend la matrice* A *de l'exercice précédent. Calculer* A^{481}*.*

Exercice 3.4. *Déterminer la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la rotation vectorielle d'angle* $\frac{\pi}{6}$ *et d'axe dirigé par le vecteur* $\vec{u} = (1, 1, 1)$*.*

Exercice 3.5. *Déterminer la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la réflexion vectorielle par rapport au plan* F *d'équation* $x + 2y - z = 0$*.*

Exercice 3.6. ***Oral CCP 2008 (Difficile)***
Soit $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *une base orthonormée directe de* $\mathbb{R}^3$*. On considère la rotation vectorielle* r *autour de la droite* D*, d'équations :*

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$$

(x,y,z) désignent les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, et telle que :

$$r(\vec{v})=\frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}).$$

1. *Déterminer un vecteur directeur $\vec{U}$ de D, unitaire et de première coordonnée dans la base $\mathscr{B}$ positive.*
2. *Déterminer un vecteur $\vec{W}$ tel que la famille $\mathscr{B}'=(\vec{U},\vec{v},\vec{W})$ soit une base orthonormée directe. On pourra s'inspirer de l'utilisation du produit vectoriel.*
3. *On note θ l'angle de la rotation r. Donner la matrice de r relative à la base $\mathscr{B}'$. En déduire que $r(\vec{v})=\cos(\theta)\vec{v}+\sin(\theta)\vec{W}$.*
4. *Déduire de la question précédente les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.*
5. *Expliciter alors la matrice de r dans la base $\mathscr{B}$.*

Exercice 3.7. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la rotation r d'axe $Vect(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$ et telle que $r(\vec{i})=\vec{k}$.*
Donner la matrice de r dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ainsi que l'angle de la rotation.

4 Un exemple en dimension 4

Exercice 4.1. *On considère un espace euclidien E de dimension 4 et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base orthonormée de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :*

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $f\in\mathscr{S}\mathscr{O}(E)$.*
2. *Soit $F=\mathrm{Vect}\,(e_1,f\,(e_1))$. Montrer que F est stable par f. Que peut-on dire de $F^\perp$?*
3. *Montrer que $(e_1,f\,(e_1))$ est une base orthonormée de F est que $f_{|F}$ est une rotation vectorielle.*
4. *Justifier que $e_4\in F^\perp$. En déduire que $F^\perp=\mathrm{Vect}\,(e_4,f\,(e_4))$.*
5. *Construire une base orthonormée (e_4,e_4') de $F^\perp$.*
6. *Donner la matrice de f dans la base $(e_1,f\,(e_1)\,,e_4,e_4')$.*

5 Matrices symétriques

Exercice 5.1. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ? Quelle remarque pouvez-vous faire ?*

Exercice 5.2. *Soit A et B deux matrice symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *A quelle condition la matrice AB est-elle aussi symétrique ?*
2. *Donner un exemple de deux matrices symétriques dont le produit ne l'est pas.*

Exercice 5.3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(A + A^T\right)^p$ est nulle si et seulement si A est antisymétrique.*

Exercice 5.4. *Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P orthogonale telles que $A = PDP^T$.*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.5.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = 4x + y + z \\ y' = x + 4y + z \\ z' = x + y + 4z \end{cases}$$

3. *Déterminer la solution de ce système vérifiant :* $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = -1 \end{cases}$.