Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance

Table des matières

Dans tout ce chapitre, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini et X et Y désignent deux VAR finies et définies sur Ω.
On notera $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$ où I et J désignent une partie finie de $\mathbb{N}$.

1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies

1.1 Loi d'un couple

Définition 1.1.

On appelle **couple de V.A.R.**, et on note (X, Y) l'application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Définition 1.2. *On appelle **loi du couple** de VAR finies (X, Y), ou encore **loi conjointe** des variables aléatoires X et Y, l'ensemble des couples $((x_i, y_j), p_{i,j})$ où :*

$$(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \text{et} \quad p_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

Méthode 1.3.
- *Déterminer la loi du couple (X, Y) signifie qu'il faut expliciter $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis calculer toutes les valeurs de $P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ où $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$.*
- *Lorsque cela sera possible, on présentera la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau à double entrée :*

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	$P([X = x_1] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_1] \cap [Y = y_2])$	$\dots$	$P([X = x_1] \cap [Y = y_n])$
x_2	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_p	$P([X = x_p] \cap [Y = y_1])$	$\dots$	$\dots$	$P([X = x_p] \cap [Y = y_n])$

Application 1.4. *Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules et Y le nombre de boules rouges. Déterminer la loi du couple (X, Y).*

1.2 Lois marginales

Définition 1.5. *Soit* (X, Y) *un couple de VAR finies.*
La loi de X *et la loi de* Y *sont appelées les* ***lois marginales du couple*** (X, Y)*.*

Méthode 1.6. *Lorsque l'on connait la loi du couple* (X, Y) *on peut en déduire la loi de* X *(resp. de* Y *) grâce à la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([Y = y_j])_{j \in J}$ *(resp.* $([X = x_i])_{i \in I}$*) :*

$$\forall i \in I, \quad P([X = x_i]) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$
$$\forall j \in J, \quad P([Y = y_i]) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Application 1.7. *En reprenant l'application 1.4, déterminer les lois marginales du couple* (X, Y)*.*

Remarque 1.8. ***Attention ! ! !*** *La réciproque à la remarque précédente n'est en général pas vraie : la connaissance des lois marginales ne suffit pas à déterminer la loi du couple.*

Exemple 1.9. *On considère deux couples de VAR finies* (X, Y) *et* (X', Y') *dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants :*

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$X' \backslash Y'$	0	1	Loi de X'
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

On peut compléter le tableau avec les lois marginales de X, Y, X' *et* Y'.
On voit ici que ces quatre V.A.R. ont la même loi mais les couples n'ont pas la même loi.

1.3 Loi conditionnelle

Définition 1.10. *Soit* (X, Y) *un couple de VAR finies et soit* $y \in Y(\Omega)$ *tel que* $P(Y = y) \neq 0$.
On appelle loi conditionnelle de X *sachant* $[Y = y]$ *l'ensemble des couples* $\Big(x_i, P_{[Y=y]}(X = x_i)\Big)$ *pour* $i \in I$.
On définit de même pour $x \in X(\Omega)$ *la loi conditionnelle de* Y *sachant* $[X = x]$.

Méthode 1.11. *Déterminer le loi conditionnelle de* X *sachant* $[Y = y]$ *signifie qu'il faut expliciter* $X(\Omega)$, *puis, pour tout* $x \in X(\Omega)$, $P_{[Y=y]}(X = x)$.

Application 1.12. *On désigne par* n *un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On lance* n *fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants.*
On note Z *la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun* $\ll$ *pile* ˇ *pendant ces* n *lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "pile".*
On dispose aussi de $n + 1$ *urnes* $U_0, U_1, \ldots, U_n$ *telles que pour tout* k *de* $\{0, 1, \ldots, n\}$, *l'urne* U_k *contient* k *boules blanches et* $n - k$ *boules noires.*
On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- *Si après les lancers de la pièce la variable* Z *prend la valeur* k *(avec* $k \geqslant 1$ *), alors on tire une par une et avec remise,* k *boules dans l'urne* U_k *et l'on note* X *la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.*

- *Si la variable Z a pris la valeur 0 , aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0 .*

Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z=k], k \in [\![0;n]\!]$.

1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle

Méthode 1.13. *Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.*
Il s'agit uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales mais voici tout de même un résumé de tout cela :

- *Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :*

$$\text{si } P(X=x_i) \neq 0, P_{[X=x_i]}(Y=y_j) = \frac{P([X=x_i] \cap [Y=y_j])}{P(X=x_i)}$$
$$\text{si } P(Y=y_j) \neq 0, P_{[Y=y_j]}(X=x_i) = \frac{P([X=x_i] \cap [Y=y_j])}{P(Y=y_j)}$$

- *Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :*

$$P([X=x_i] \cap [Y=y_j]) = P(X=x_i) P_{[X=x_i]}(Y=y_j)$$
$$P([X=x_i] \cap [Y=y_j]) = P(Y=y_j) P_{[Y=y_j]}(X=x_i)$$

- *Lois marginales à partir de la loi du couple :*

$$P(X=x_i) = \sum_{j \in J} P([X=x_i] \cap [Y=y_j])$$
$$P(Y=y_j) = \sum_{i \in I} P([X=x_i] \cap [Y=y_j])$$

- *Lois marginales à partir des lois conditionnelles :*

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j)\, P_{[Y=y_j]}(X = x_i)$$
$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)\, P_{[X=x_i]}(Y = y_j)$$

Pour l'exploitation des deux derniers points en exercice, il faudra toujours bien rédiger au moins une fois l'utilisation de la formule des probabilités totales en précisant le système complet d'événements utilisé (si le même type de raisonnement est utilisé plusieurs fois dans le problème il ne faudra pas hésiter à utiliser une rédaction du type : "De même ...").

Application 1.14. *Reprenons l'application 1.12. Déterminer la loi de X.*

1.5 n variables aléatoires

Dans cette partie, $X_1, X_2, \dots, X_n$ désignent n variables aléatoires réelles finies définies sur Ω.

Définition 1.15. *On appelle **n-uplet de V.A.R. finies** ou vecteur de n VAR finies, et on note $(X_1, \dots, X_n)$, l'application de Ω dans $\mathbb{R}^n$ définie par :*

$$(X_1, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

Définition 1.16. *On appelle **loi conjointe** de $(X_1, \dots, X_n)$ la donnée de $X_1(\Omega), X_2(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, la donnée de $P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n])$.*

*Les lois des X_i s'appellent les **lois marginales** de $(X_1, \dots, X_n)$.*

2 Indépendance de V.A.R. finies

2.1 Deux variables

Définition 2.1. *On dit que deux VAR finies X et Y sont indépendantes si :*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y).$$

Exemple 2.2. *Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire deux avec remise. Soit X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro tiré.*
Les tirages étant effectués avec remise, les événements $[X = i]$ et $[Y = j]$ sont indépendants et donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Application 2.3. *On effectue la même expérience que dans l'exemple 2.2 mais sans remise.*
Les deux tirages ne sont alors plus indépendants et donc on a l'intuition que les deux variables X et Y ne sont pas indépendantes. Le démontrer.

Remarque 2.4. *Lorsque X et Y sont indépendantes on peut obtenir la loi du couple (X, Y) à l'aide des lois de X et de Y, ce qui n'est pas possible en général (cf. exemple 1.9).*

Proposition 2.5.
- *Si X et Y sont indépendantes, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a :*

  $$P((X, Y) \in A \times B) = P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

- *En particulier pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

  $$P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y).$$

Application 2.6. *On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On effectue deux tirages avec remise et on note X_1 le numéro du premier jeton obtenu et X_2 le numéro du second jeton.*
Donner la loi de la variable aléatoire $T = \max(X_1, X_2)$.

Proposition 2.7. *Si X et Y sont deux VAR indépendantes et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

2.2 n variables

Définition 2.8. *Soient $X_1, \ldots, X_n n$ VAR finies. On dit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:*

$$P\left([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]\right) = P\left(X_1 = x_1\right) \times \cdots \times P\left(X_n = x_n\right).$$

Proposition 2.9. ***Lemme des coalitions***

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des VAR finies mutuellement indépendantes et soit $p \in \{2, \ldots, n-1\}$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

Exemple 2.10. *Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 V.A.R. finies mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - e^{X_5}$ sont indépendantes.*

3 Somme et produit de deux V.A.R. finies

On s'intéresse dans cette partie aux variables aléatoires finies $S = X + Y$ et $Z = XY$.

Exemple 3.1. *Reprenons l'application 1.4 et déterminons les lois de $S = X + Y$ et $Z = XY$.*

- *On a tout d'abord $S(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Calculons par exemple :*

$P(S=3)$
$= P([X=0]\cap[Y=3]) + P([X=1]\cap[Y=2]) + P([X=2]\cap[Y=1])$
$= \frac{1}{84} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{10}{84}$

De même on peut obtenir le tableau :

valeur de S	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
probabilité	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	*0*	*0*

- $Z(\Omega) = \{0;1;2;3;4;6\}$ *et :*

valeur de Z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*6*
probabilité	$\frac{51}{84}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{28}$	*0*	*0*	*0*

3.1 Espérance

Théorème 3.2. *$X+Y$ et XY admettent une espérance (car VAR finies) avec :*

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ *linéarité de l'espérance.*
- $E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X=x]\cap[Y=y])$

Remarque 3.3.
- *Il faut donc connaitre la loi du couple (X,Y) pour calculer $E(XY)$.*
- *La démonstration de ces formules est hors programme.*

Proposition 3.4. *Si X et Y sont indépendantes alors :*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Preuve :

Application 3.5. *On considère X une VAR qui suit une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$ et Y la variable définie par :*

$$Y = \begin{cases} 1 & si\ X = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

1. *Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.*
2. *Calculer $E(XY)$ et $E(X) \times E(Y)$.*

3.2 Somme de lois de Bernoulli

Théorème 3.6. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VAR mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.*
Alors la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque 3.7.
- *Ce théorème permet de comprendre une nouvelle fois l'interprétation d'une loi binomiale.*
  On effectue n expérience indépendantes et on s'intéresse au nombre X de réalisation d'un événement A de probabilités p.
  On peut alors noter X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A est réalisé lors de la i ème expérience et 0 sinon. X_i suit donc la loi de Bernoulli de paramètre p, et comme les expériences sont indépendantes, les variables X_i sont mutuellement indépendantes.
  On remarque alors que $X = X_1 + \ldots + X_n$.
- *La démonstration de ce théorème se fait par récurrence.*

3.3 Covariance

Définition 3.8. *Soient X et Y deux VAR finies.*

On appelle ***covariance*** *de X et de Y le nombre réel :*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Théorème 3.9.

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Méthode 3.10. *Le plus souvent pour calculer la covariance d'un couple de variables aléatoire on utilise la formule donnée dans le théorème et non celle donnée dans la définition.*

Remarque 3.11. $\operatorname{cov}(Y,X) = \operatorname{cov}(X,Y)$ *et on a aussi* $\operatorname{cov}(X,X) = V(X)$

Application 3.12. *Reprendre l'application 1.4 et calculer la covariance de X et Y.*

Proposition 3.13. *Si X et Y sont deux VAR indépendantes, on a :*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0.$$

Remarque 3.14. *La réciproque est en générale fausse.*
Dans l'application 3.5 :

$\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

mais X et Y ne sont pas indépendantes.

Théorème 3.15. *Soient X et Y deux VAR finies. Alors, pour tout réels a et b :*

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y).$$

Remarque 3.16. *On en déduit facilement que :*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{V(X+Y)-V(X)-V(Y)}{2}.$$

Corollaire 3.17. *Si X et Y sont deux VAR finies indépendantes on a :*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Remarque 3.18. *Encore une fois la réciproque à ce résultat est en général fausse.*

3.4 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 3.19. *Soient X et Y deux VAR finies d'écart type non nul. On appelle* ***coefficient de corrélation linéaire*** *de X et Y le réel :*

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Remarque 3.20. *On pourra noter la ressemblance avec la formule donnant le cosinus d'un angle entre deux vecteurs à l'aide du produit scalaire et des normes :*

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

Proposition 3.21. *Soient X et Y deux VAR finies d'écart type non nul. Alors :*

$$|\rho(X,Y)| \leqslant 1.$$

Remarque 3.22. *La démonstration de cette propriété repose sur une inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$|E(XY)| \leqslant \sqrt{E\left(X^2\right)}\sqrt{E\left(Y^2\right)}$$

ainsi que sur l'expression de ρ sous la forme :

$$\rho(X,Y) = \frac{E((X-E(X))(Y-E(Y)))}{\sqrt{E((X-E(X))^2)}\sqrt{E((Y-E(Y))^2)}}.$$

Interprétation :

Ce nombre est un réel compris entre -1 et 1 qui compare les similarités entre les lois de X et de Y.
Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable ($X = aY + b$ ou $Y = aX + b$ avec $a \geqslant 0$) et il est égal à -1 dans le cas où la fonction affine est décroissante ($X = aY + b$ ou $Y = aX + b$ avec $a \leqslant 0$).

Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte ; on emploie simplement l'expression "**fortement corrélées**" pour qualifier les deux variables.

Un coefficient de corrélation égal à 0 signifie que $\text{cov}(X,Y) = 0$.
On dit que les variables X et Y sont **non corrélées**.