TD 16 - Applications du théorème d'Ampère et induction

1 Câble coaxial - III

Les câbles coaxiaux servent à transmettre des signaux basse fréquence. Ils sont utilisés quotidiennement, par exemple dans les installations de télévision domestiques, les émetteurs WiFi, etc.

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe (Oz) : un noyau ou âme, de rayon a, et un blindage, de rayon $b > a$, séparés par un matériau isolant. L'âme est parcourue par un courant constant I, dirigé selon $+\vec{e}_z$, uniformément réparti en volume. Le blindage, d'épaisseur négligeable, est parcouru par un courant exactement opposé réparti à sa surface. Le câble et la distribution de courant associée sont schématisés sur la figure 1.

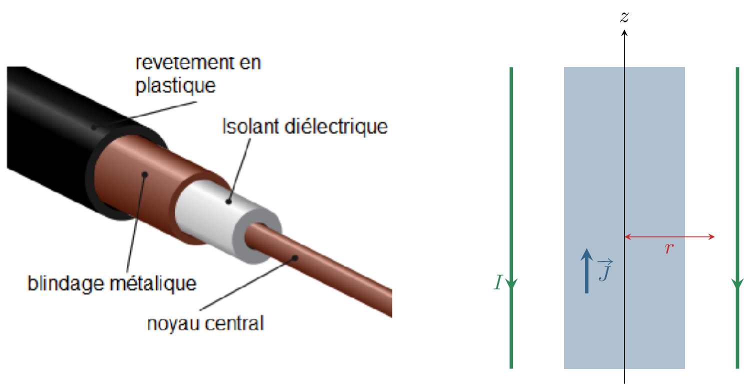

Figure 1: Schéma de la distribution de courant dans un câble coaxial

1. Exprimer la densité volumique de courant $\vec{j}$ qui parcourt l'âme en fonction notamment de I et a.

2. Par un application soignée du théorème d'Ampère, déterminer la valeur du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace.

2 Rappels d'induction

- Flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface S

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1}$$

- Loi de Faraday, force électromotrice e (tension) induite dans un circuit par variation du flux de champ magnétique

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

- Flux propre : On appelle flux propre Φ_p le flux du champ magnétique créé par un circuit C au travers du circuit C lui-même.

- Inductance propre : L'inductance propre L d'une bobine parcourue par un courant i est définie par

$$\Phi_p = Li \tag{3}$$

- Inductance mutuelle : Soient deux solénoïdes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ parcourus par les courants i_1 et i_2. En notant $\Phi_{\mathcal{S}_\infty \to \mathcal{S}_2}$ et $\Phi_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_\infty}$ le flux du solénoïde 1 dans le 2 et inversement, on définit l'inductance mutuelle M par

$$\Phi_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2} = Mi_1 \quad ; \quad \Phi_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1} = Mi_2 \tag{4}$$

3 Plaque à induction - II

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$. Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la figure 2. On prend

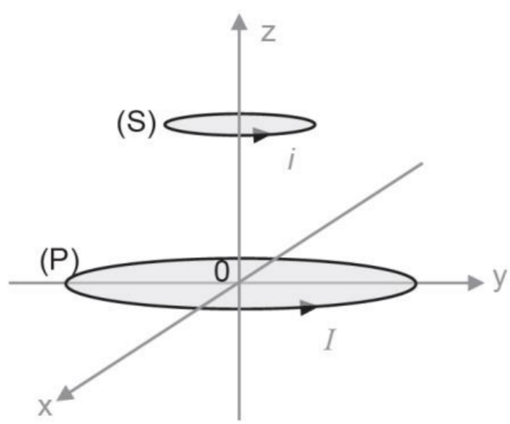

Figure 2: Schéma de notre plaque à induction

les hypothèses suivantes

- le champ magnétique traversant la spire (S) est uniforme et vaut

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \tag{5}$$

- On note R la résistance de la spire (S) et on néglige son inductance propre.

1. Déterminer l'expression du flux $\Phi(t)$ traversant la spire (S).
2. En déduire l'expression de la force électromotrice e apparaissant dans la spire puis du courant induit $i(t)$.
3. Déterminer l'expression de la puissance dissipée par effet joule $\mathcal{P}(t)$ en fonction de R, B_0, ω, r_2 et t puis de la puissance moyenne $\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P} \rangle$.

4 Solénoïdes imbriqués - IV

On considère deux solénoïdes (bobines), orientées selon l'axe (Oz), de même longueur l et de rayons r_1 et r_2, $r_1 < r_2$. Les deux solénoïdes ont le même nombre de spires N. On note $n = N/l$ la densité linéique de spires.

La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I\cos(\omega t)$, on suppose que ω est suffisamment faible pour que le théorème d'Ampère reste valable. La bobine extérieure est en court-circuit (sortie et entrée reliées par un fil).

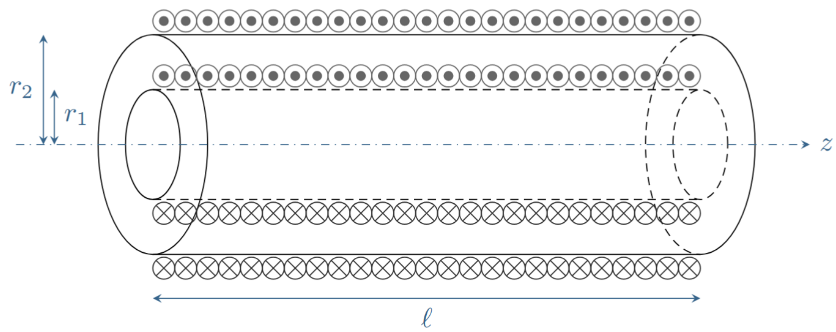

Figure 3: Solénoïdes imbriqués

1. En supposant le champ extérieur nul et en appliquant le théorème d'Ampère, donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur d'un solénoïde infini d'axe (Oz) parcouru par un courant i.

Ici, le solénoïde 1 crée un champ $\vec{B}_1$ variable qui induit une tension dans le solénoïde 2, ce qui provoque l'apparition d'un courant i_2 et donc d'un champ magnétique $\vec{B}_2$. Nous allons utiliser les lois de l'induction afin de calculer le champ magnétique total $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

2. Donner les expressions de $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ en fonction de n, i_1 et i_2.
3. Déterminer L_1 inductance propre de la bobine 1 en fonction de r_1, N et l. Déterminer ensuite L_2 en fonction de r_2, N et l.
4. Calculer le flux $\Phi_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1}$ de la bobine 2 à l'intérieur de la bobine 1 en fonction de i_2, N, l et r_1.
5. En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle M.
6. Faire un schéma électrique équivalent des deux bobines. Les deux circuits sont couplés par l'inductance mutuelle M. On néglige la résistance des bobines.
7. Quel est le flux total Φ traversant la bobine 1 ?
8. En utilisant le résultat précédent et en utilisant les équations (2), (3) et (4) montrer que les tensions u_1 et u_2 aux bornes des solénoïdes 1 et 2 valent

$$u_1(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad ; \quad u_2(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

9. En admettant que i_2 n'a pas de composante continue, en déduire que

$$i_2(t) = -\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 i \cos(\omega t) \tag{7}$$

10. Donner finalement l'expression de $\vec{B}$ en fonction de N, l, r_1, r_2, i, ω et t.