Résolutions numériques d'équations différentielles par la méthode d'Euler

Consignes :

— Tous les programmes seront documentés.

— Pour chacune des fonctions construites, on effectuera une batterie de tests de manière à couvrir les différents cas possibles, en particulier les cas "limite ".

1 Résolution numérique d'une équation différentielle nonlinéaire d'ordre 1 : chute avec frottements

Considérons un parachutiste de masse $m = 70$ kg sautant depuis un point fixe. Au cours de sa chute, il est soumis à son poids ainsi qu'à des frottements fluides qu'on modélisera par une force proportionnelle à la vitesse de chute au carré : $\vec{F} = -kv^2\vec{u}_z$ (avec un axe z choisi descendant) avec $k = 0,2\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot\ \mathrm{s}^2$.

On montre alors que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v^2 = g \tag{1}$$

Cette équation différentielle étant non-linéaire, on se propose de la résoudre numériquement en utilisant la méthode d'Euler.

Rappel : La méthode d'Euler d'ordre 1 permet de résoudre numériquement des équations différentielles de la forme $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$, avec des conditions initiales de la forme $y\,(t_0) = y_0$.

Pour cela, on construit la fonction pas à pas en calculant les termes de la suite (y_n) définie par récurrence :

$$\begin{cases} y_0 = y\,(t_0) \\ y_{n+1} = y_n + h \times f\,(y_n, t_n) \end{cases}$$

avec h le pas de calcul et $t_n = t_0 + nh$.

1. Quelle est la fonction $f(y, t)$ correspondant à cette équation différentielle ? Définir en python la fonction $f(y, t)$ associée. On définira les constantes physiques comme des variables globales placées en début d'exercice.

2. Définir une fonction python euler 1(f, t0, y0, tmax, h) prenant en arguments :

- la fonction f ;
- les conditions initiales t0 et y0 ;
- la valeur maximale $tmax$ du temps pour lequel on souhaite calculer $y(t)$;
- le pas h ;
  et retournant deux listes contenant les valeurs de t_n et y_n pour $t_0 \leq t_n \leq t_{\max}$.

3. Utiliser la fonction euler1 pour résoudre l'équation différentielle, avec $h = 0,1$ s et $t_{\max} = 20$ s. On tracera la courbe à l'aide du module matplotlib.
   Pour améliorer le résultat, on peut diminuer h, mais le calcul dure alors plus longtemps. Pour mesurer le temps que met la fonction euler1 à faire le calcul, on peut utiliser la fonction time() du module time.
   Cette fonction retourne un nombre en virgule flottante égal au temps écoulé en secondes depuis le 01/01/1970 à $00h00$ à l'instant où elle est exécutée.
4. Modifier votre programme pour qu'il affiche le temps que met la fonction euler à s'exécuter et comparer les résultats obtenus pour $h = 0,001$ s, $h = 0,01$ s et $h = 0,1$ s. Conclure quant à la complexité en temps de calcul.
5. Essayer de faire tourner votre programme avec une valeur de h importante. Que se passe-t-il ?

2 Résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre 2 : oscillateur amorti

On considère une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. On posera dans la suite $x = l - l_{eq}$ l'écart à la position d'équilibre.

À $t = 0$ on lâche le ressort sans vitesse initiale d'une position $x(0) = X_0$. On rappelle que l'équation différentielle vérifiée par x s'écrit, sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Les conditions initiales sont $x(0) = X_0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
On se propose ici de résoudre numériquement cette équation différentielle, d'en tracer la solution ainsi que le portrait de phase.

Rappel : la méthode d'Euler, décrite plus haut, s'applique à des équations différentielles d'ordre 1.

Il est donc nécessaire de réécrire l'équation différentielle d'ordre 2 à l'aide de deux équations couplées d'ordre 1.
Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \text{ est équivalent à } \begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\omega_0^2x\end{cases}$$

La méthode d'Euler consiste à écrire :

$$\begin{cases}\binom{x_0}{v_0}=\binom{x(0)}{v(0)}\\ \binom{x_{n+1}}{v_{n+1}}=\binom{x_n}{v_n}+h\times f\left(\binom{x_n}{v_n},t_n\right)\end{cases}$$

où f est une fonction de x_n, v_n et t_n.
Il s'agit donc bien d'un méthode d'Euler d'ordre 1.

1. Quelle est la fonction $f(x,v,t)$ correspondant à cette équation différentielle ? Définir en python la fonction $\mathrm{f(x,v,t)}$ associée.
   On définira les constantes physiques comme des variables globales placées en début d'exercice.
2. Définir une fonction python euler $2(\mathrm{f,t0,x0,v0,tmax,h})$ prenant en arguments :
   - la fonction f ;
   - les conditions initiales t0, x0 et v0 ;
   - la valeur maximale tmax du temps pour lequel on souhaite calculer $x(t)$;
   - le pas h ;
     et retournant trois listes contenant les valeurs de t_n, x_n et v_n pour $t_0\leq t_n\leq t_{\max}$.
     Remarque : on pourra s'aidera de la fonction euler1.
3. Utiliser la fonction euler2 pour résoudre l'équation différentielle, avec $h=0,01$ s et $t_{\max}\ =4$ s. On tracera le portrait de phase à l'aide du module matplotlib.
   On prendra $\omega_0=6,3\mathrm{rad.s}^{-1}$. Qu'observe-t-on ?
4. Recommencer la résolution en prenant $h=0,001$ s et $h=0,0001$ s. Conclure.
5. On ne néglige plus les frottements. Utiliser la fonction euler2 pour résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \quad \text{avec} \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q=\omega_0\frac{m}{\lambda}.$$

   Tracer le portrait de phase pour plusieurs valeurs de Q.

3 Résolution numérique d'un système d'équation différentielle d'ordre 1 : modèle de Lotka-Volterra d'évolution des populations

On s'intéresse à l'évolution d'une population de lièvres vivant dans un pays où l'herbe est toujours verte et abondante.

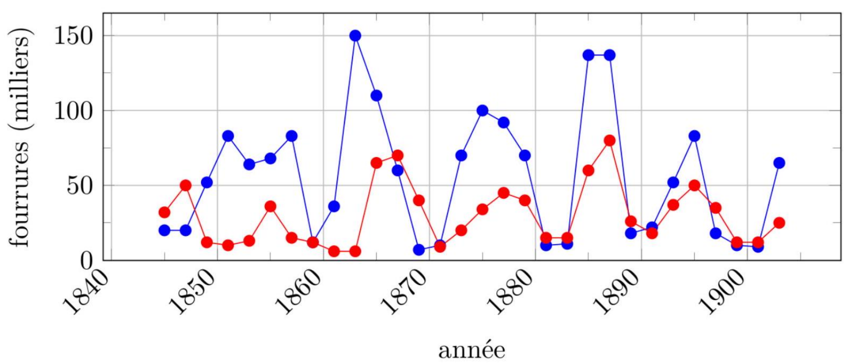
Si les lièvres disposent de ressources alimentaires illimitées, leur population croît exponentiellement.
Pour tenir compte de la surpopulation, on peut pondérer leur taux de fertilité par un taux de mortalité proportionnel à la population : plus les lièvres sont nombreux, plus ils sont victimes de maladies.

L'équation différentielle vérifiée par la population de lièvres $l(t)$ est donc de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = (a - bl) \times l,$$

où a est le taux de fertilité, et b une prise en compte de la surpopulation. On prendra $a = 2$ lièvres par an par lièvre et $b = 0,001$ lièvres par an par lièvre.

1. Utiliser la fonction euler1 précédente pour tracer $y(t)$ sur une même courbe dans l'intervalle de temps [0,5 ans] avec $h = 0,01$ an pour les différentes conditions initiales : $y_0 = 500, 1000, 2000, 3000,$ et 50 lièvres. Que remarque-t-on ?
2. En présence de prédateurs, le modèle précédent ne semble pas fonctionner, on peut le constater en étudiant l'évolution des populations de lièvres et de lynx au Canada. Les données présentées ci-dessous représentent l'évolution des quantités de fourrures de lièvre et de lynx achetées par la Compagnie de la Baie d'Hudson, qui avait le droit exclusif de la traite des fourrures dans tout l'ouest canadien, entre 1845 et 1903.



Un système d'équations proposé indépendamment par Alfred Lotka et Vito Volterra en 1925 et 1926 permet de modéliser l'évolution de deux populations en interaction, du type proie-prédateur. On suppose dans ce modèle que seuls les prédateurs réduisent la croissance des proies qui disposent de ressources alimentaires illimitées.

En l'absence de prédateurs, la population de proies croît exponentiellement. En l'absence de proies, la population de prédateurs décroit exponentiellement. L'interaction entre proies et prédateurs est proportionnelle à leur croisement dans la nature, donc au produit des deux populations. On se propose d'utiliser ce modèle pour décrire les interactions entre lièvres et lynx du Canada, ces derniers se nourrissant presque exclusivement de lièvres.

On obtient alors, en notant $l(t)$ le nombre de lièvres et $y(t)$ le nombre de lynx, le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = al - bly \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cy + dly \end{cases}$$

Afin d'obtenir des valeurs numériques comparables sur un graphique, on choisit d'exprimer le nombre de lièvres en milliers (1 kilolièvre = 1000 lièvres). On propose les paramètres suivants :

- $a = 1,5$ kilolièvre par an par kilolièvre,
- $b = 0,05$ kilolièvre par an par (kilolièvre.lynx),
- $c = 0,48$ lynx par an par lynx,
- $d = 0,05$ lynx par an par (kilolièvre.lynx).

(a) Définir une fonction Lotka_Volterra qui permet d'obtenir $t, l(t)$ et $y(t)$ en utilisant la méthode d'Euler.

Elle prendra comme argument deux fonctions f et g, deux conditions initiales l_0 et y_0, un intervalle de temps $t_{\min}$, $t_{\max}$ et un pas

h.

Remarque : On peut aussi réutiliser la fonction euler2. Si elle est bien faite, il n'y aura même pas besoin de la réadapter au problème.

(b) Appliquer la fonction Lotka_Volterra avec $y_0 = 10$ lynx, $l_0 = 4$ kilolièvres, sur une durée de 50 ans, avec $h = 0,0005$ an. Tracer $l(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps. Le modèle vous semble-t-il adapté ?

(c) Toutes conditions égales par ailleurs, tracer sur le même graphe y fonction de l, pour $y_0 = 10, 15, 30$ et 40 lynx. Le graphe obtenu est appelé diagramme de phase. Que dire des trajectoires de phase ?

(d) Montrer à partir de ce graphe qu'il existe des solutions stables. Tracer sur le même graphe le diagramme de phase pour $y_0 = 10$ lynx, $l_0 = 4$ kilolièvres en faisant varier h : $h = 0,0005$ an, $h = 0,005$ an et $h = 0,05$ an. Commenter.

(e) Le modèle de Lotka-Volterra considère que la population de lynx et de lièvres est isolée, mais cela n'est pas le cas.
Proposer une modification pour tenir compte de l'influence des trappeurs, sachant que le lièvre est plus facile à chasser mais que sa fourrure est moins chère. Tenir éventuellement compte du fait que la population de trappeurs fluctue.
Proposer un modèle pour remonter au nombre de fourrures de la courbe.