

Exercices

Chap.15 : Couples de V.A.R.

1 Loi d'un couple, loi marginale, loi conditionnelle

Exercice 1.1. Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z) . (On pourra noter B_i : "obtenir une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage").
2. En déduire la loi de Z .
3. Calculer l'espérance de Z .

Exercice 1.2. Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses, les interventions ont parfois lieu avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres, et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de 0,25 .

1. Un client appelle le service à 4 reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de fois où ce client a subi un retard.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.
 - (b) Calculer la probabilité de l'événement R : "le client a subi au moins un retard".
2. Le nombre d'appels reçus par jours est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $m > 0$. On note Z le nombre d'appels traités en retard.
 - (a) Exprimer la probabilité conditionnelle de $[Z = k]$ sachant $[Y = n]$, où $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{4}m$.

Exercice 1.3. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun « pile » pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier « pile ».

On dispose aussi de n urnes U_1, U_2, \dots, U_n telles que pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- Si après les lancers de la pièce la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
- Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

1. Déterminer la loi de Z .

2. On souhaite déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = k]$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

(a) Donner $X(\Omega)$.

(b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = 0]$.

(c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$.

(d) Soit $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = k]$.

On pourra reconnaître une loi usuelle.

3. Déterminer la loi de X .

On pourra laisser certains résultats exprimés sous forme de somme.

Exercice 1.4. Soit X une VAR discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y) .

2. X et Y sont-elle indépendantes ?

3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 1.5. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de VAR de Bernoulli de paramètre p , indépendantes.

Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?

2. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i < j$. Calculer $\text{cov}(Y_i, Y_j)$.

Exercice 1.6. Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} P([S = 0] \cap [U = 0]) &= 0,4 \\ P([S = 0] \cap [U = 1]) &= 0,3 \\ P([S = 1] \cap [U = 0]) &= 0,2 \\ P([S = 1] \cap [U = 1]) &= 0,1 \end{aligned}$$

où S représente la variable aléatoire prenant :

- la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros
- la valeur 1 sinon

et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

- (a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \frac{3}{5}$.
 - (b) Calculer la covariance du couple (S, U) . Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
 - (c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus. Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
- C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
 - L_1 (resp. L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp. du 2^{ème}) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à zéro sinon.
- (a) Reconnaître la loi de C_n , rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.
 - (b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que : $\sum_{k=0}^n P(L_1 = k) = 1$.
 - (c) Déterminer la loi de L_2 .

2 Somme de variables aléatoires

Exercice 2.1. Andy est un ivrogne : quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même ; et s'il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre.

On relève son état d'ivresse pendant 400 jours, à partir du jour 1, sachant qu'au jour 0 il était ivre.

On note X le nombre de jours où il était sobre, et X_i la variable qui vaut 1 si Andy est sobre le $i^{\text{ème}}$ jour et 0 sinon.

On note $p_i = P(X_i = 1)$.

1. Exprimer X en fonction des X_i .
2. Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i = -\frac{1}{3}p_{i-1} + \frac{1}{3}$.
3. On pose $q_i = p_i - \frac{1}{4}$. Quelle est la nature de la suite $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$?
4. En déduire la loi des X_i puis calculer $E(X)$.

Exercice 2.2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :

- 1 boule numérotée 1
- 2 boules numérotée 2
- ...
- n boules numérotées n .

1. On tire une boule de cette urne, on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.

- (a) Quelle est la loi de T_1 ?
- (b) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) .
- (c) En déduire la loi de T_2 .
- (d) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
- (e) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

Exercice 2.3. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c (c \neq 0)$ boules de la couleur de la boule tirée.

On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :
$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p , par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^p X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1 .

3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2 .
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p .
6. Soit $p \leq n - 1$.
 - (a) Déterminer $P_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
 - (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$
 - (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. (On montrera par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(p) : \ll \text{les variables } X_1, X_2, \dots, X_p \text{ suivent une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2} \gg$ est vraie pour tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et on pensera à calculer $E(Z_p)$).

Exercice 2.4. On lance deux dés équilibrés à 6 faces, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. Les deux lancers sont supposés indépendants.

On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Déterminer la loi de X et en déduire $E(X)$. On pourra remarquer qu'il est plus astucieux de commencer par calculer $P(X \geq k)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $\text{cov}(X, Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?