

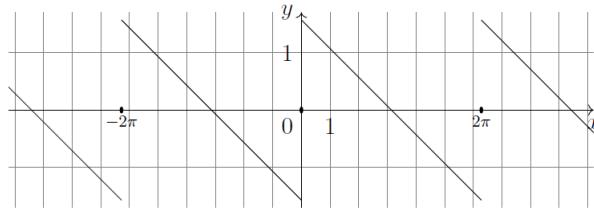
NOM : _____

Interrogation 7 - CORRECTION

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi-t}{2} & \text{si } t \in]0; 2\pi[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- Dessiner le graphe de la fonction f .



- Justifier que f est une fonction impaire.

Il suffit de montrer que f est impaire sur $[-\pi; \pi]$. $\forall x \in [-\pi; \pi]$, on a $-x \in [-\pi; \pi]$.

De plus si $x \in]0; \pi[$, $f(-x) = f(2\pi - x) = \frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{-\pi + x}{2} = -f(x)$.
Et $f(-0) = 0 = -f(0)$ f est bien une fonction impaire.

- Justifier que f est égale à série de Fourier sur \mathbb{R} .

Comme f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique, d'après le théorème de Dirichlet pour tout réel t la série de Fourier de f en t converge et vaut $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2}$.

Or si $t \neq 2k\pi$, f est continue en t donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2} = f(t)$.

Et si $t = 2k\pi$, $f(t) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$.

Donc pour tout réel t la série de Fourier de f converge et vaut $f(t)$.

- Déterminer la série de Fourier de f .

La fonction f est 2π -périodique et impaire. On a ici $T = 2\pi$ et $\omega = 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n(f) = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{4}{2\pi} \int_0^{2\pi/2} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - t}{2} \sin(nt) dt$$

On réalise une IPP avec les fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 définies par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\pi-t}{2} & u'(t) &= -\frac{1}{2} \\ v'(t) &= \sin(nt) & v(t) &= -\frac{1}{n} \cos(nt) \end{aligned}$$

NOM : _____

On a donc :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi - t}{2} \times \left(-\frac{1}{n} \cos(nt) \right) \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2n} \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{\pi}{2} \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin(nt)$.

5. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

- On peut appliquer le fait que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t = 1$. On obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

Donc $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$.

- On peut appliquer le fait que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.
On remarque alors que $\sin(n\pi/2) = 0$ lorsque n est paire et $\sin((2p+1)\pi/2) = (-1)^p$. On a donc :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = f(\pi/2) = \frac{\pi}{4}$$

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.