Programme de khôlle 19

Semaine du 9 mars 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentations CCS et CCINP sont autorisées.

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche. Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***coupleVAR(n)*** qui reçoit en argument un entier n non nul, qui simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et qui renvoie les valeurs de X et Z correspondantes.
   Indication : on pourra utiliser l'instruction *list.remove(x)* qui supprime de la liste le premier élément dont la valeur est égale à x.
2. ***esperances(n)*** qui reçoit en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie les valeurs moyennes de X et Z après réalisation de 1000 expériences.
3. ***graphe()*** qui affiche un graphe contenant les points de coordonnées :
   - $(n; z(n))$ si $z(n)$ désigne la moyenne pour Z obtenue par la fonction ***esperances(n)***
   - $(n; \frac{2(n+1)}{3})$

   pour $n \in [\![2; 20]\!]$

2 Question de cours

Démontrer et compléter les propriétés suivantes :

1. Soit M une matrice orthogonale. Alors $det(M) \in$ ....
2. Soit $f \in \mathscr{SO}(\mathbb{R}^2)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de E on a :

$$\mathscr{M}(f) = \text{............}$$

   On dit alors que f est la ....

3. Décrire les isométries de $\mathbb{R}^3$. Indiquer dans chaque cas comment obtenir les éléments caractéristiques.

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *1. Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :*

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la rotation vectoriel d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Exercice 3.2. *1. Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur $\vec{u} = (3, 1)$.

Exercice 3.3. *1. La matrice suivante est-elle diagonalisable dans une base orthonormée ? Si c'est le cas,la diagonaliser dans une base orthonormée :*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Indication : *on pourra remarquer que A est symétrique.*

2. Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance