

## Programme de khôlle 19

Semaine du 9 mars 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

### 1 Python

Les documentations CCS et CCINP sont autorisées.

Une urne contient 2 boules blanches et  $n - 2$  boules rouges. On effectue  $n$  tirages sans remise de cette urne. On appelle  $X$  le rang de sortie de la première boule blanche et  $Z$  le rang de sortie de la deuxième boule blanche. Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***coupleVAR*( $n$ )** qui reçoit en argument un entier  $n$  non nul, qui simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et qui renvoie les valeurs de  $X$  et  $Z$  correspondantes.  
**Indication** : on pourra utiliser l'instruction `list.remove(x)` qui supprime de la liste le premier élément dont la valeur est égale à  $x$ .
2. ***esperances*( $n$ )** qui reçoit en argument un entier naturel non nul  $n$  et qui renvoie les valeurs moyennes de  $X$  et  $Z$  après réalisation de 1000 expériences.
3. ***graphe*()** qui affiche un graphe contenant les points de coordonnées :
  - $(n; z(n))$  si  $z(n)$  désigne la moyenne pour  $Z$  obtenue par la fonction ***esperances*( $n$ )**
  - $(n; \frac{2(n+1)}{3})$
 pour  $n \in \llbracket 2; 20 \rrbracket$

### 2 Question de cours

Démontrer et compléter les propriétés suivantes :

1. Soit  $M$  une matrice orthogonale. Alors  $\det(M) \in \dots\dots\dots$
2. Soit  $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ . Alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de  $E$  on a :

$$\mathcal{M}(f) = \dots\dots\dots$$

On dit alors que  $f$  est la .....

3. Décrire les isométries de  $\mathbb{R}^3$ . Indiquer dans chaque cas comment obtenir les éléments caractéristiques.

### 3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 3.1.** 1. Caractériser géométriquement l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à :

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  de la rotation vectoriel d'angle  $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ .

**Exercice 3.2.** 1. Caractériser l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  de la symétrie orthogonale d'axe dirigée par le vecteur  $\vec{u} = (3, 1)$ .

**Exercice 3.3.** 1. La matrice suivante est-elle diagonalisable dans une base orthonormée ? Si c'est le cas, la diagonaliser dans une base orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

**Indication :** on pourra remarquer que  $A$  est symétrique.

2. Déterminer les réels  $a, b, c, d, e$  tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \\ a & \frac{1}{\sqrt{3}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & e \end{pmatrix}$$

représente une rotation de  $\mathbb{R}^3$ .

### Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

1 Isométries

1.1 Groupe orthogonal

1.2 Symétrie orthogonale

1.3 Matrices orthogonales

1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3

2.1 Orientation d'un espace vectoriel

2.2 En dimension 2

2.3 En dimension 3

3 Matrices symétriques

Théorème spectral

**Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance**

1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies

1.1 Loi d'un couple

1.2 Lois marginales

1.3 Loi conditionnelle

1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.

1.5  $n$  variables aléatoires

2 Indépendance de V.A.R. finies

2.1 Deux variables

2.2  $n$  variables

3 Somme et produit de deux V.A.R. finies

3.1 Espérance

3.2 Somme de lois de Bernoulli

3.3 Covariance