

I Puisage de l'eau pour l'irrigation

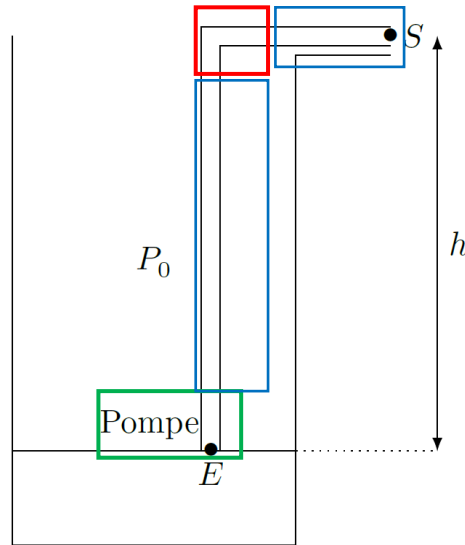
Q1. Dans le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait et incompressible, on peut appliquer la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \text{constante}$$

La grandeur, homogène à une pression, $\mathcal{C} = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz$ se conserve.

Q2. La grandeur ne se conserve plus lorsque le fluide traverse un élément actif ou lorsque l'on prend en compte les pertes de charges (fluide visqueux). On distingue deux types de pertes de charges : régulières (le long des sections droites) et singulières (particularité de la canalisation, éléments traversés).

Ici :



Q3. Le fluide est incompressible en écoulement stationnaire : le débit volumique Q se conserve.

A l'entrée : $Q = \Sigma \times v_E$ et à la sortie : $Q = \sigma \times v_S$

On en déduit : $v_E = v_S$.

Q4. En appliquant la relation de Bernoulli en présence d'un élément actif le long d'une ligne de courant entre l'entrée E et la sortie S :

$$\frac{P_S - P_E}{\rho} + \frac{1}{2}(v_S^2 - v_E^2) + g(z_S - z_E) = w_i$$

$$\Leftrightarrow w_i = \frac{P_S - P_E}{\rho} + gh$$

Application numérique : $w_i = \frac{(1,5 - 1,0) \cdot 10^5}{1000} + 9,8 \times 30 = 344 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Q5. Puissance mécanique :

$$P_{\text{méca}} = w_i \times D_m = w_i \rho Q = 344 \times 1000 \times 1,0 \cdot 10^{-3} = 344 \text{ W}$$

Q6. Puissance électrique :

$$P_{\text{élec}} = \frac{P_{\text{méca}}}{0,8} = 430 \text{ W}$$

Q7. Le débit volumique en $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$: $Q = 3,6 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$

Calcul de H :

$$H = 30 + \frac{(1,5 - 1,0) \cdot 10^5}{1000 \times 9,8} = 35 \text{ m}$$

D'après le document il faut utiliser la pompe N°6.

II Analyse de l'eau captée

II.A – Diagramme E-pH du manganèse

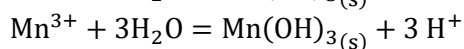
Q8. On peut classer les espèces par nombre d'oxydation croissant du Manganèse :

0 : $\text{Mn}_{(s)}$

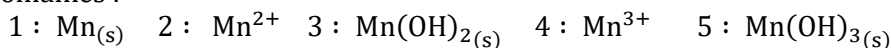
+II : Mn^{2+} , $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$

+III : Mn^{3+} , $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$

Les hydroxydes prédominent aux pH élevés, ou en écrivant les réactions acido-basiques entre deux espèces de même nombre d'oxydation) :



On en déduit pour les domaines :



Q9. Equilibre associé à la frontière :



Soit $K_S = [\text{Mn}^{3+}][\text{OH}^-]^3$ avec sur la frontière $[\text{Mn}^{3+}] = C_T$

De plus,

$$[\text{OH}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_e}{10^{-\text{pH}}}$$

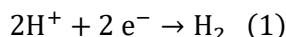
On en déduit :

$$\text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+]) = -\log\left(\frac{K_e C_T^{1/3}}{K_S^{1/3}}\right) = 2,8$$

Q10. Couples de l'eau et frontières associées.

Couple 1 : $\text{H}_2\text{O}_{(l)}/\text{H}_{2(g)}$

Demi-équation :



Loi de Nernst (1) :

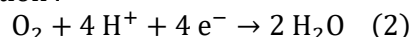
$$E_1 = E_1^0 + \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{[\text{H}^+]^2}{c^0} \times \frac{p^0}{p_{\text{H}_2}}\right)$$

En admettant $p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar}$; $c^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$; $p^0 = 1 \text{ bar}$ et $E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$

$$E_1 = 0 + \frac{0,06}{2} \log[\text{H}^+]^2 = -0,06 \text{ pH}$$

Couple 2 : $\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(l)}$

Demi-équation :



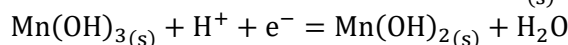
Loi de Nernst (2) :

$$E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{4} \log\left(\frac{[\text{H}^+]^4}{c^0} \times \frac{p_{\text{O}_2}}{p^0}\right)$$

En admettant $p_{\text{O}_2} = 1 \text{ bar}$; $c^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$; $p^0 = 1 \text{ bar}$ et $E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{O}_2) = 1,23 \text{ V}$

$$E_2 = 1,23 + \frac{0,06}{4} \log[\text{H}^+]^4 = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$

Q11. L'équilibre redox sur la frontière oblique entre les domaines $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$ et $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$ est :

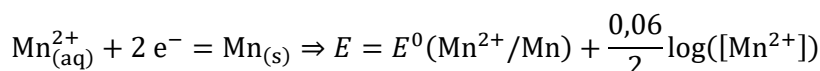


Potentiel associé :

$$E = E^0 + \frac{0,06}{1} \log\left(\frac{[\text{H}^+]}{C^0}\right) = E^0 - 0,06 \text{ pH}$$

La pente est donc de $-0,06 \text{ V}$ par unité de pH.

Q12. La frontière entre les domaines de Mn^{2+} et $\text{Mn}_{(s)}$ est horizontale, au potentiel $E = -1,25 \text{ V}$. L'équilibre redox associé est :



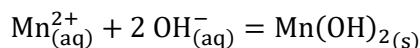
On en déduit :

$$E^0(\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}) = E - 0,03 \log(C_T) = -1,19 \text{ V}$$

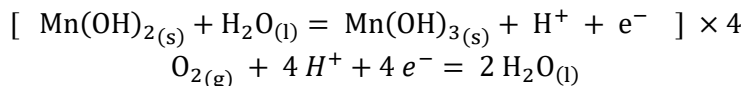
Q13. Les domaines associés à $\text{Mn}_{(s)}$ et Mn^{3+} ne présentent pas d'intersection avec celui de l'eau. Ces espèces sont donc instables dans l'eau. Les autres espèces sont stables dans l'eau.

II.B – Dosage du dioxygène dissout dans l'eau par la méthode de Winkler

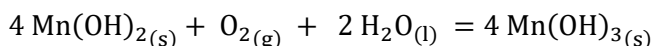
Q14. L'ajout d'ions hydroxydes fait augmenter le pH. Sur le diagramme potentiel pH, on voit que les ions Mn^{2+} vont donner l'hydroxyde $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$. L'équation de la réaction qui modélise la transformation est donc :



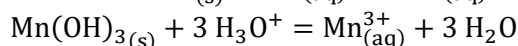
Q15. Les domaines de $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$ et $\text{O}_{2(g)}$ sont disjoints. Ces espèces vont donc donner lieu à une réaction redox, dont les couples mis en jeu sont $\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(l)}$ et $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}/\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$. Les demi-équations sont :



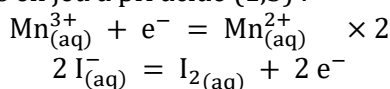
L'équation de réaction est donc :



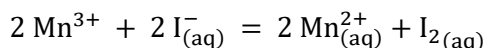
Q16. Sur le diagramme potentiel-pH, on voit que lors du passage en milieu acide, $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$ donne $\text{Mn}_{(\text{aq})}^{3+}$. L'équation modélisant la transformation est $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)} = \text{Mn}_{(\text{aq})}^{3+} + 3 \text{OH}_{(\text{aq})}^{-}$, que l'on réécrit en milieu acide :



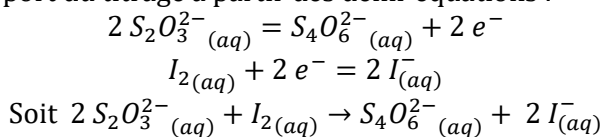
Q17. Les demi-équations des couples mis en jeu à pH acide (1,5) :



On en déduit l'équation de réaction :



Q18. Ecrivons la réaction de support du titrage à partir des demi-équations :



Q19. Lors de la première étape, tout le dioxygène dissout dans le volume initial V est supposé réagir, selon l'équation de réaction obtenue à la question 15. On obtient ainsi une quantité de matière de $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$:

$$n(\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}) = 4\xi_{\text{max}} = 4 n_{\text{O}_2} = 4 C_{\text{O}_2} V$$

Par l'équation de la question 16, on fabrique une quantité de Mn^{3+} égale à celle de $\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}$ précédente.

$$n(\text{Mn}^{3+}) = n(\text{Mn}(\text{OH})_{3(s)}) = 4 C_{\text{O}_2} V$$

Par l'équation de la question 17, on fabrique une quantité de I_2 deux fois inférieure, qui est donc égale à $2 C_{\text{O}_2} V$:

$$n_{\text{I}_2} = \frac{n(\text{Mn}^{3+})}{2} = \frac{4 C_{\text{O}_2} V}{2} = 2 C_{\text{O}_2} V$$

On prélève alors un volume V_0 de la solution obtenue. La quantité de I_2 dans ce prélèvement peut être estimée par $2 C_{\text{O}_2} V \times V_0/V = 2 C_{\text{O}_2} V_0$, mais cela suppose que le volume du milieu réactionnel n'a pas varié au cours des étapes 1 et 2. Cette hypothèse semble contestable car de nombreux produits ont été ajoutés. Il aurait mieux fallu travailler sur un volume V_0 d'eau dès le début des étapes.

Le dosage donne alors :

$$\frac{n(\text{I}_2)}{1} = \frac{n(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})}{2} \Rightarrow 2 C_{\text{O}_2} V_0 = \frac{C_1 V_{\text{eq}}}{2} \Rightarrow C_{\text{O}_2} = \frac{C_1 V_{\text{eq}}}{4 V_0}$$

Q20. La concentration massique s'écrit : $c_{\text{O}_2} = M(\text{O}_2) \times C_{\text{O}_2} = 12 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, ce qui est supérieur au seuil des $5 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Cette eau peut donc être utilisée pour l'irrigation.

Q21. Lignes 11 et 12 à compléter (par analogie aux 4 précédentes) :

11	$C_1 = 1.5 \times 10^{-2}$
12	$u_{C_1} = 1.5 \times 10^{-3}$

Remarque : cette incertitude relation de 10% sur le titrant est sans doute surestimée, une valeur de 1% semblerait plus correcte pour nos laboratoires.

Ligne 17 (par analogie à 15 et 16) :

17	<code>C1_sim = C1 + rd.normal(0,U_C1,N)</code>
----	--

Q22. Prenons la moyenne pour écrire le résultat final et son écart-type pour son incertitude type :

$$c_{O_2} = (1,20 \pm 0,12) \cdot 10^{-2} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

Remarque : d'après l'énoncé et les données il faut garder 3 chiffres significatifs, mais notons que nous aurions pu n'en garder que 2 à cause du prélèvement de V_0 .

III Étude thermique de la serre

III.A – Équation de diffusion à travers une paroi latérale de la serre en polycarbonate

Q23. Les températures T_i et T_e sont uniformes sur les plans (yOz) et (yEz). On peut considérer que la température reste uniforme dans un plan (yz), pour une abscisse donnée. La variation de température est unidimensionnelle et ne dépend que de x .

De plus, tant que le régime stationnaire n'est pas atteint, la température varie dans le temps en tout point du système. Donc $T(M, t) = T(x, t)$.

Q24. Il n'y a pas de source d'énergie (effet Joule, réaction chimique, rayonnement) dans la zone étudiée. On considère le système Σ_0 défini dans l'énoncé.

Premier principe de la thermodynamique appliqué à Σ_0 :

$$dU = \delta W + \delta Q \text{ or } \delta W = 0 \text{ pour un solide indéformable}$$

Ou bien $dH = \delta Q$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_{\text{entrant}}(x) - \delta Q_{\text{sortant}}(x + dx) = \Phi_{th}(x) dt - \Phi_{th}(x + dx) dt \\ &\Leftrightarrow dU = j(x) S dt - j(x + dx) S dt = - \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right) S dx dt \end{aligned}$$

Pour un solide $dU = C dT = c dm dT$

Avec dm la masse de la barre entre x et $x + dx$:

$$dm = \rho dV = \rho S dx$$

Soit :

$$dU = \rho c S dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt = - \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right) S dx dt \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)$$

Q25. Le signe négatif traduit l'orientation du vecteur $\vec{j}$ des hautes températures vers les basses températures : le transfert thermique s'effectue du chaud vers le froid.

Q26. A 1 dimension :

$$\vec{j}(x, t) = j \vec{u}_x = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} (x, t) \right) \vec{u}_x$$

Q27. En remplaçant dans le résultat de la question 24 :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} (x, t) \right) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On identifie $D = \lambda / \rho c$ le coefficient de diffusion.

D'après l'équation différentielle :

$$[D] \frac{\theta}{L^2} = \frac{\theta}{T} \Leftrightarrow [D] = L^2 \cdot T^{-1} \Rightarrow D \text{ s'exprime en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Q28. Par l'analyse dimensionnelle, on peut écrire :

$$D = \frac{e^2}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{e^2}{D} = \frac{e^2 \rho c}{\lambda}$$

$$\text{Application numérique : } \tau = \frac{(1,0 \cdot 10^{-2})^2 \times 1,2 \cdot 10^3 \times 1674}{0,2} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ s}$$

III.B – Étude du régime stationnaire

Q29. En régime stationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B$$

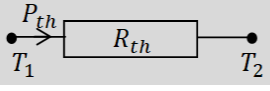
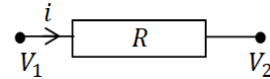
Avec les conditions aux limites $T(0) = T_i$ et $T(e) = 0$, on obtient :

$$T(x) = \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i$$

Q30. Flux thermique :

$$\phi = \vec{j} \cdot \vec{S} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \cdot S \vec{u}_x = -\lambda S \times \frac{T_e - T_i}{e} = \frac{\lambda S}{e} (T_i - T_e)$$

Q31. Analogie entre thermique et électricité :

Thermique	$T_1 - T_2$	$P_{th} = \phi$	R_{th}	
Electricité	$U = V_1 - V_2$	i	R	

Ici, par analogie avec la loi d'Ohm $U = Ri$ on peut écrire : $T_i - T_e = \phi \times R_{th}$.

On en déduit :

$$R_{th} = \frac{T_i - T_e}{\phi} = \frac{e}{\lambda S}$$

Application numérique : $R_{th} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Q32. En régime stationnaire, la puissance de chauffage P_{th} apportée à la serre correspond à la puissance qui traverse la paroi, et donc $P_{th} = \phi$. Les résistances thermiques sont en série, les mêmes lois s'appliquent que pour un circuit électrique.

$$T_i - T_e = (R_{th} + R_{cc}) \times \phi \Leftrightarrow P_{th} = \phi = \frac{T_i - T_e}{R_{th} + R_{cc}} = \frac{20 - 5}{(1,67 - 1,1) \cdot 10^{-3}} = 5,5 \text{ kW}$$

Q33. Cette machine est une machine réfrigérante : le principe est donc d'abaisser la température de la source froide (ici la chambre froide). Pour cela, le fluide doit prélever un transfert énergétique à la chambre froide, c'est ce qu'il fait en se vaporisant.

Par conséquent, la chambre froide est au contact de l'évaporateur.

Q34. La machine est une machine réceptrice, le fluide frigorigène reçoit du travail de la part de l'extérieur : $W > 0$. Ce travail permet de prélever un transfert thermique à la source froide : $Q_f > 0$. Le fluide restitue par ailleurs un transfert thermique à la source chaude $Q_c < 0$.

Q35. L'efficacité se définit comme le rapport de la grandeur valorisable (ici Q_f) par la grandeur coûteuse (ici W) :

$$e = \frac{Q_f}{W}$$

Q36. Premier principe appliqué au fluide sur le cycle : $\Delta U_{cycle} = W + Q_c + Q_f = 0$

Second principe appliqué au fluide sur le cycle (considéré réversible dans le cas de l'efficacité de Carnot) :

$$\Delta S_{cycle} = S_e + S_c = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \text{ et } \Delta S_{cycle} = 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

On en déduit pour l'efficacité de Carnot :

$$e_c = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f} = -\frac{1}{\frac{Q_c}{Q_f} + 1} = -\frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Remarque : l'efficacité réelle est toujours inférieure à celle de Carnot qui correspond à l'efficacité maximale que l'on peut atteindre, $e \leq e_c$. C'est la conséquence du 2nd principe $S_c \geq 0$.

Q37. Application numérique :

$$e_c = \frac{273 + 3}{45 - 3} = 6,6$$

Interpréter le résultat : c'est donc l'efficacité maximale que l'on peut atteindre. C'est une efficacité et pas un rendement, donc il n'est pas surprenant qu'elle soit supérieure à 1.

Q38. Voir annexe à la fin du document.

Q39. Dans un diagramme de Clapeyron (P, v), l'aire du cycle correspond au travail reçu par le fluide (grandeur algébrique). On peut donc conclure que lorsque le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, le travail reçu sur le cycle est positif, et inversement dans le sens horaire.

Dans l'hypothèse où on peut généraliser cela pour un diagramme (P, h), on remarque que le cycle est parcouru dans le sens trigo, $W > 0$: la machine fonctionne comme un récepteur.

Q40. Au point 3, le fluide est sous forme de vapeur saturée (que de la vapeur avec la dernière goutte de liquide) et au point 4, il n'y a que du liquide avec la dernière bulle de vapeur (liquide saturé).

Q41. Au point 6, on lit graphiquement $x_{v6} \approx 0,3$. Il y a environ 30 % de vapeur. On pourrait vérifier la valeur à l'aide du théorème des moments.

Q42. Premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire (dit principe industriel) :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

Dans le cas où $\Delta h \gg \Delta e_c$ et Δe_p , on a : $\Delta h = w_i + q$ où w_i est le travail massique indiqué et q le transfert thermique massique reçus par le fluide. Toutes les grandeurs sont exprimées en J/kg.

Q43. Au contact de la source froide, dans l'évaporateur (sans partie mobile $w_i = 0$, ou isobare), entre les points 6 et 1 :

$$q_f = \Delta h_{6 \rightarrow 1} = h_1 - h_6 = 146 \text{ kJ. kg}^{-1}$$

Q44. Au contact de la source chaude, dans le condenseur (sans partie mobile $w_i = 0$, ou isobare), entre les points 2 et 5 :

$$q_c = h_5 - h_2 = -186 \text{ kJ. kg}^{-1}$$

Q45. Dans le compresseur, supposé calorifugé, puisque la transformation est adiabatique ($q = 0$), entre les points 1 et 2 :

$$w_i = h_2 - h_1 = 442 - 402 = 40 \text{ kJ. kg}^{-1}$$

Q46. On en déduit l'efficacité réelle :

$$e = \frac{q_f}{w_i} = \frac{146}{40} = 3,65$$

Cette valeur est inférieure à celle de Carnot, le cycle de cette machine n'est donc pas totalement réversible.

Q47. Puissance thermique :

$$P_{th,f} = D_m q_f = 0,16 \times 146 = 23,4 \text{ kW}$$

Diagramme de la pression en fonction de l'enthalpie massique pour le R134a

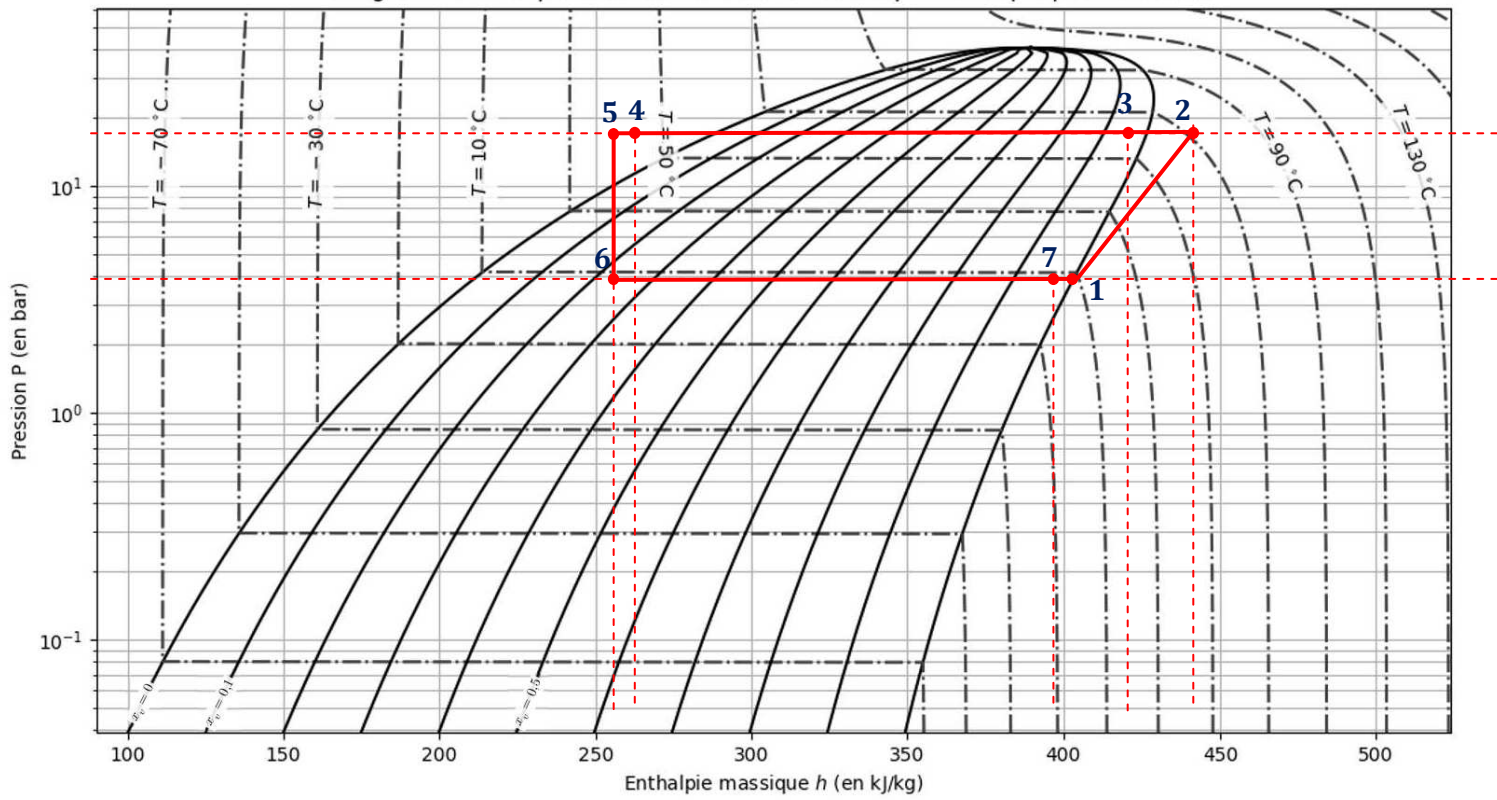


Figure A