

Concours Blanc - Mathématiques

Lycées A.Artaud-J.Ferry-G.Tillion

Semaine du lundi 2 mars 2026
4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

EXERCICE : autour de la série harmonique

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. Le but est de démontrer que celle-ci est une série divergente. On donne ensuite une application probabiliste des résultats obtenus.

On pose :

$$\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Q1. Énoncer la définition de convergence pour une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ de nombres réels ou complexes.

Solution

Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \ell$.

Q2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Solution

Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$, c'est le critère de Riemann.

Q3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x.$$

Solution

Posons $f(x) = e^x - 1 - x$ pour tout réel x , la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles, de dérivée $x \mapsto f'(x) = e^x - 1$, ainsi $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq \ln(1) = 0$ par croissance de $\ln$, donc f admet pour tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

ce qui prouve que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, c'est-à-dire que $e^x \geq 1 + x$.

Q4. En déduire alors que :

$$\forall n \geq 1, e^{H_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

puis, en remarquant l'égalité $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $e^{H_n} \geq n + 1$.

Solution

$$\forall n \geq 1, \quad e^{H_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \underbrace{\exp\left(\frac{1}{k}\right)}_{\geq 1 + \frac{1}{k}} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right). \quad (1)$$

Ensuite,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1,$$

donc l'inégalité (1) se simplifie sous la forme $e^{H_n} \geq n+1$.

Q5. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty.$$

En déduire la divergence de la série harmonique.

Solution

$e^{H_n} \geq n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $e^{H_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par le théorème des gendarmes.

Supposons alors que la série harmonique converge, c'est-à-dire que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge, notons ℓ sa limite, c'est un réel car $(H_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle, donc l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \ell \in \mathbb{R}$ implique la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = e^\ell$ par continuité de la fonction exponentielle en tout réel. C'est absurde puisqu'on a démontré plus haut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty$.

Donc par l'absurde, la série harmonique ne peut que diverger.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient initialement une boule noire. On effectue n tirages dans l'urne de la manière suivante :

- Au cours de chaque tirage, on tire une boule de l'urne, puis on la remet dans celle-ci en y ajoutant une boule blanche.
- On considère les n tirages indépendants.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire définie par :

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{si la boule tirée lors du } k\text{-ième tirage est blanche,} \\ 1 & \text{si la boule tirée lors du } k\text{-ième tirage est noire.} \end{cases}$$

On définit enfin la variable Z_n par :

$$Z_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Q6. Que représente la variable Z_n ?

Solution

C'est le nombre de fois que la boule noire a été tirée au bout des n tirages.

Q7. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de X_k et préciser son espérance.

Solution

X_k prend la valeur 0 ou 1, donc suit forcément une loi de Bernoulli : la loi de Bernoulli de paramètre $p_k = P(X_k = 1)$.

Etant donné qu'au $k^{\text{ième}}$ tirage, il y a k boule(s) dans l'urne, dont exactement une boule noire, alors $P(X_k = 1) = \frac{1}{k}$.

Conclusion : $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Q8. Vérifier que l'espérance de Z_n est H_n .

Solution

Pour tout $p \in [0; 1]$, toute variable aléatoire X suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ a pour espérance $E(X) = p$, donc, comme $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$, et comme la fonction espérance est linéaire, alors

$$E(Z_n) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

Q9. En utilisant **Q4**, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut espérer obtenir en moyenne au moins 4 fois la boule noire.

On pourra utiliser le fait suivant : $e^4 \in]54, 55[$.

Solution

On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(Z_n) \geq 4$, c'est-à-dire $H_n \geq 4$, ce qui est équivalent à $e^{H_n} \geq e^4$ par croissance de $\exp$.

Etant donné que $e^{H_n} \geq n + 1$ par **Q4**, alors il suffit que $n \geq e^4 - 1 \in]53; 54[$: l'entier $n = 54$ par exemple fait l'affaire.

PROBLÈME 1 : étude de matrices tridiagonales particulières

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés (diagonalisabilité, valeur du déterminant) de certaines matrices tridiagonales. Plus précisément, pour un entier naturel $n \geq 2$, on considère $n - 1$ couples de nombres complexes (a_k, b_k) , pour k variant de 1 à n , tels que $a_k b_k = -1$, et on s'intéressera à la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & 1 & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On posera également $\mathcal{M}_1 = (1)$ (matrice carrée d'ordre 1 dont le seul coefficient vaut 1).

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes. Elles peuvent être traitées séparément.

Notations

- On note $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A et $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre de A associé à un scalaire λ ;
- on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement dans $\mathbb{R}$) ;
- on note I_n la matrice identité d'ordre n ;
- on note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z .

Partie I - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on considère que $n = 3$ et on pose $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$. On s'intéresse donc à la matrice M_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q10. Justifier que M_3 vérifie bien les données de l'énoncé.

Solution

M_3 est la matrice M_n où $n = 3$ et $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 1$, vérifiant effectivement les conditions $a_1 b_1 = a_2 b_2 = -1$.

Q11. Déterminer le rang de $M_3 - I_3$ et en déduire que M_3 admet au moins une valeur propre réelle à préciser.

Solution

La matrice $M_3 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour image $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ (car la première colonne est l'opposée de la dernière), or les colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, elles constituent ainsi une base de $\text{Im}(M_3 - I_3)$, qui est donc de dimension 2, ce qui revient à dire que $M_3 - I_3$ est de rang 2.

Ainsi, par le théorème du rang, le noyau de $M_3 - I_2$ est de dimension $3 - 2 = 1$, en particulier ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul, donc 1 est une valeur propre réelle de M .

Q12. Déterminer $\chi_{M_3}(X)$. Ce polynôme est-il scindé dans $\mathbb{R}$?

Solution

En commençant par développer le déterminant ci-dessous par rapport à sa première colonne,

$$\begin{aligned} \chi_{M_3}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)((X-1)^2 + 1) - (-1)(X-1) \\ &= (X-1)(X^2 - 2X + 1 + 1 - (-1)) = (X-1)(X^2 - 2X + 3) \\ &= \boxed{(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)} \end{aligned}$$

où, par considération du discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 = (i2\sqrt{2})^2$,

$$\alpha = \frac{-(-2) - i2\sqrt{2}}{2} = 1 - i\sqrt{2},$$

$$\beta = \frac{-(-2) + i2\sqrt{2}}{2} = 1 + i\sqrt{2}.$$

Ce polynôme χ_{M_3} n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ puisque certaines de ses racines ne sont pas réelles.

Q13. Dédurre de la question précédente la valeur du déterminant de M_3 .

Solution

$\chi_{M_3}(0) = \det(0I_3 - M_3) = \det(-M_3) = (-1)^3 \det(M_3) = -\det(M_3)$,
 or $\chi_{M_3} = (X - 1)(X^2 - 2X + 3)$, donc $\chi_{M_3}(0) = -1 \times 3 = -3$,
 par suite $\boxed{\det(M_3) = 3}$.

Q14. Justifier que M_3 admet trois valeurs propres complexes distinctes, dont une seule est réelle et les deux autres conjuguées. En déduire que M_3 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et donner, sans calcul, la dimension de ses sous-espaces propres.

Solution

On a montré en **Q12** que les racines complexes de χ_{M_3} sont le réel 1 ainsi que les deux complexes non réels $\mu = 1 + i\sqrt{2}$ et $\bar{\mu} = 1 - i\sqrt{2}$, ces trois nombres constituent donc les valeurs propres complexes de M_3 en tant que racines de son polynôme caractéristique.

Ainsi χ_{M_3} est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, ce qui est suffisant pour conclure que M_3 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et plus précisément que chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

On note dans la suite λ l'unique valeur propre réelle de M_3 et μ l'unique valeur propre complexe de M_3 dont la partie imaginaire est strictement positive. Ainsi, les valeurs propres de M_3 sont λ , μ et $\bar{\mu}$.

Q15. Déterminer une base du sous-espace propre $E_\lambda(M_3)$.

Solution

$$E_1(M_3) = \text{Ker}(M_3 - I_3).$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que :

$$M_3 X = X \iff \begin{cases} x + y &= x \\ -x + y + z &= y \\ -y + z &= z \end{cases} \iff y = 0 \text{ et } x = z$$

D'où $E_1(M_3) = \text{Vect}(1, 0, 1)$

Q16. Déterminer les nombres complexes p tels que :

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}.$$

En déduire une base du sous-espace propre $E_\mu(M_3)$.

Solution

$$M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} p + i\sqrt{2} &= (1 + i\sqrt{2})p \\ -p + i\sqrt{2} - p &= (1 + i\sqrt{2})i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} - p &= -(1 + i\sqrt{2})p \end{cases} \iff \begin{cases} i\sqrt{2} &= i\sqrt{2}p \\ -2p + i\sqrt{2} &= i\sqrt{2} - 2 \\ -i\sqrt{2} &= -i\sqrt{2}p \end{cases} \iff p = 1$$

Comme on obtient un vecteur non nul, on peut conclure que $\mu = 1 + i\sqrt{2}$ est valeur propre de M_3 et que :

$$E_\mu(M_3) = \text{Vect}(1, i\sqrt{2}, -1)$$

Q17. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients réels, $z \in \mathbb{C}$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Montrer que si X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre z , alors le vecteur :

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix},$$

est un vecteur propre de N associé à la valeur propre $\overline{z}$. En déduire une base de $E_{\overline{\mu}}(M_3)$.

Solution

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre z , alors $NX = zX$; soit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = zx_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = zx_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = zx_3 \end{cases}$$

Par les propriétés de la conjugaison, il vient :

$$\begin{cases} \overline{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} = \overline{zx_1} \\ \overline{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} = \overline{zx_2} \\ \overline{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3} = \overline{zx_3} \end{cases}$$

or N est une matrice à coefficients réels, donc on a :

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 = \bar{z}\bar{x}_1 \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 = \bar{z}\bar{x}_2 \\ a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 = \bar{z}\bar{x}_3 \end{cases}$$

Donc on a $N\bar{X} = \bar{z}\bar{X}$; ce qui montre bien que $\bar{X}$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre $\bar{z}$.

On peut donc en déduire : $E_{\bar{\mu}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Partie II - Cas général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Uniquement dans cette partie, on considère que l'entier naturel n vaut 2. On s'intéresse donc à la matrice M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

où a_1 et b_1 sont deux nombres complexes tels que $a_1 b_1 = -1$.

Q18. Déterminer $\chi_{M_2}(X)$.

Solution

$$\begin{aligned} \chi_{M_2}(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & -b_1 \\ -a_1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2 - a_1 b_1 = (X-1)^2 + 1 = (X-1)^2 - i^2 = (X-1-i)(X-1+i) \end{aligned}$$

Q19. Si on considère a_1 et b_1 réels, la matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Trigonalisable dans $\mathbb{R}$?

Solution

a_1 et b_1 étant des réels vérifiant $a_1 b_1 = -1$, le calcul précédent montre que $\chi_{M_2}(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc que M_2 est ni diagonalisable, ni trigonalisable dans $\mathbb{R}$.

Q20. La matrice M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Aucune diagonalisation effective n'est demandée.

Solution

Le polynôme caractéristique de M_2 est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc M_2 est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Q21. Donner la valeur du déterminant de M_2 .

Solution

On utilise la Q.18 :

$$\chi_{M_2}(0) = (0 - 1)^2 + 1 = 2$$

Objectif de la suite du problème

Dans la **partie III**, nous démontrerons certains résultats liés à la suite de Fibonacci.

Dans la **partie IV**, nous déterminerons la valeur du déterminant des matrices tridiagonales vérifiant les conditions de l'énoncé.

Partie III - La suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q22. Montrer que pour tout entier naturel n , F_n est un entier naturel.

Solution

Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est un entier naturel.

- Initialisation : $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Hérédité : On suppose que la propriété est vérifiée par F_n et F_{n+1} . Par définition, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, donc, par hypothèse de récurrence, F_{n+2} est la somme de deux entiers naturels ; ainsi F_{n+2} est bien un entier naturel ; ce qui établit l'hérédité.
- Conclusion : On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est un entier naturel.

Q23. Résoudre l'équation caractéristique associée à $(F_n)_{n \geq 0}$. En déduire l'expression de F_n pour tout entier naturel n .

Solution

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 . L'équation caractéristique associée est : $X^2 - X - 1 = 0$ avec $\Delta = 1 + 4 = 5$.

Les racines sont donc $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On sait donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On détermine a et b à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = 1 = a + b \\ F_1 = 1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

Après calculs on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

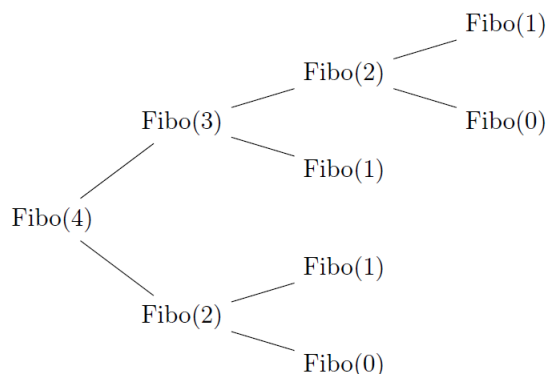
On considère la fonction récursive suivante, prenant en argument un entier naturel n , et renvoyant la valeur de F_n :

```
def Fibo(n):
    ''' n : entier naturel. Renvoie la valeur de F_n '''
    if n <= 1:
        return 1
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
```

Q24. Les trois questions suivantes sont liées à la fonction **Fibo**.

- (a) À l'aide d'un schéma, représenter les différents appels récursifs lors de l'exécution de l'instruction **Fibo(4)**.

Solution



- (b) Expliquer, de manière simple et sans calcul, pourquoi cette fonction a une complexité de calcul élevée.

Solution

Si on note F_n le nombre d'appels récursifs de **Fibo**(n), alors on a :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et la Q.23 montre que la complexité de cette fonction est exponentielle.

- (c) Écrire une fonction **FiboV2**, prenant en argument un entier naturel n et renvoyant la valeur du terme F_n . Cette fonction ne devra pas être récursive et devra avoir un coût de calcul moins élevé que **Fibo**.

```
def fiboV2(n) :
    u=1
```

```

v=1
for k in range (2,n+1):
    w=u+v
    u=v
    v=w
return w

```

Partie IV - Calcul du déterminant dans le cas général

On reprend les notations de la présentation générale et on considère donc les matrices M_n pour tout entier naturel $n \geq 1$. On note alors d_n le déterminant de M_n .

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ est définie de la manière suivante : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Q25. Donner les valeurs de d_1 et de d_2 puis calculer d_3 .

Solution

$d_1 = \det(M_1) = 1$ et $d_2 = 2$ d'après Q. 21 partie III.
Enfin d'après Q. 13 partie I, $d_3 = 3$.

Q26. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$.
On pourra développer d_{n+2} par rapport à la dernière ligne de M_{n+2} .

Solution

$$d_{n+2} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_{n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

d_{n+2} est le déterminant d'une matrice de $M_{n+2}(\mathbb{C})$.

$d_{n+2} =$

$$(-1)^{(n+2+n+1)} a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix} + (-1)^{2(n+2)} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

On reconnaît le dernier déterminant (c'est d_{n+1}) et on développe le premier, par rapport à la dernière colonne. De plus $(-1)^{(n+2+n+1)} = -1$, d'où :

$$d_{n+2} = (-1)a_{n+1}(-1)^{2(n+1)}b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + d_{n+1}$$

On sait que $a_{n+1}b_{n+1} = -1$, on a donc bien la relation de récurrence :

$$d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$$

Q27. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $d_n = F_n$.

Solution

On a $d_1 = F_1 = 1$; $d_2 = F_2 = 2$ de plus $(d_n)_{n \geq 1}$ et $(F_n)_{n \geq 1}$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2, donc :

$$\forall n \geq 1, d_n = F_n$$

PROBLÈME 2 : calcul d'une borne inférieure

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence de la borne inférieure suivante :

$$m = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Plus précisément, nous allons montrer que cette borne inférieure existe et est atteinte en un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On utilisera pour cela un produit scalaire sur un espace vectoriel bien choisi.

Dans la suite, $E = \mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 1.

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Dans ce corrigé, on notera, pour la suite, que, pour tout entier naturel n , $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$.

Q28. Calculer I_0 .

Solution

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Q29. Montrer que :

$$\forall n \geq 0, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Solution

Par linéarité de l'intégrale :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx; \text{ et donc :}$$

$$\forall n \geq 0, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Q30. En déduire les valeurs de I_1 , I_2 , I_3 et vérifier que :

$$I_4 = -\frac{7}{12} + \ln(2).$$

Solution

D'après Q29 :

$$I_1 = \frac{1}{0+1} - I_0 = 1 - \ln(2); I_2 = \frac{1}{1+1} - I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2); I_3 = \frac{1}{2+1} - I_2 = \frac{5}{6} - \ln(2) \text{ et}$$

$$I_4 = \frac{1}{3+1} - I_3 = \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \ln(2) = -\frac{7}{12} + \ln(2)$$

Q31. Montrer que $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Solution

Par linéarité de l'intégrale, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{1+x} dx;$$

or pour tout $x \in [0, 1]$, on a $1+x > 0$, $x^n \geq 0$ et $x-1 < 0$; donc, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Ainsi, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q32. Montrer que $(I_n)_{n \geq 0}$ converge et que sa limite est 0.

Solution

Par positivité de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0$, donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$.

D'après Q29 on a $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$; par passage à la limite, il vient $2l = 0$, donc $l = 0$ et ainsi

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Q33. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Solution

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a $\mathcal{P}(n)$ avec

$$\mathcal{P}(n) : \ll (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \gg$$

Initialisation. $(-1)^1 I_1 = -1 + \ln(2)$ et $\ln(2) + \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2) - 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. On suppose $\mathcal{P}(n)$.

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n, \text{ donc } (-1)^{n+1} I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - (-1)^{n+1} I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n I_n.$$

Par hypothèse de récurrence, il vient :

$$(-1)^{n+1}I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

Conclusion. On déduit de ce qui précède, par le principe de récurrence, que

$$\forall n \geq 1, \mathcal{P}(n).$$

Q34. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et donner sa somme.

Solution

La somme partielle (de rang n) de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^n I_n - \ln(2)$;
or, d'après Q32 :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n I_n - \ln(2)) = -\ln(2)$; donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Q35. En utilisant **Q29** et **Q31**, montrer que :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n},$$

et en déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Donc $I_n + I_{n+1} \leq I_n + I_n \leq I_{n-1} + I_n$, soit $\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{n}$; puis :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}.$$

On divise par $\frac{1}{2n}$: $\frac{2n}{2(n+1)} \leq \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leq 1$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2(n+1)} = 1$; par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$; ce qui prouve que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On rappelle que $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx.$$

Q36. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E . On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

Solution

Caractère symétrique. Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx = \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x} dx = \langle Q, P \rangle, \text{ donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est symétrique.}$$

Caractère bilinéaire. Soient $(P_1, P_2, Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \int_0^1 \frac{(\lambda P_1(x) + P_2(x))Q(x)}{1+x} dx = \lambda \int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{1+x} dx.$$

Ainsi, $\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

Caractère positif. Soit $P \in E$.

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 \frac{(P(x))^2}{1+x} dx \geq 0 \text{ par positivité de l'intégrale (la fonction } x \mapsto \frac{(P(x))^2}{1+x} \text{ est positive sur } [0, 1]). \text{ Donc } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est positive.}$$

Caractère défini. Soit $P \in E$.

$$\text{On suppose } \langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(P(x))^2}{1+x} dx = 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{(P(x))^2}{1+x}$ est continue et positive sur $[0, 1]$ et d'intégrale nulle, donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{(P(x))^2}{1+x} = 0$, puis

$$\forall x \in [0, 1], P(x) = 0.$$

Ainsi, P possède une infinité de racines et il s'agit donc du polynôme nul : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Conclusion. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

Q37. Les vecteurs 1 et X sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

Solution

$$\langle 1, X \rangle = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = I_1 = 1 - \ln(2) \neq 0; \text{ donc } 1 \text{ et } X \text{ ne sont pas orthogonaux.}$$

Q38. On note $L(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Justifier l'existence de deux réels α et β tels que :

$$L(X^2) = \alpha X + \beta.$$

Solution

$L(X^2)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, donc $L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$; et donc

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, L(X^2) = \alpha X + \beta.$$

Q39. Que peut-on dire du polynôme $X^2 - L(X^2)$ par rapport à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$? En déduire que (α, β) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2, \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3. \end{cases}$$

Solution

$L(X^2)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, donc on peut dire que $X^2 - L(X^2)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

Ainsi

$$\begin{cases} \langle 1, X^2 - L(X^2) \rangle = 0 \\ \langle X, X^2 - L(X^2) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle 1, X^2 - \alpha X - \beta \rangle = 0 \\ \langle X, X^2 - \alpha X - \beta \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 \frac{x^2 - \alpha x - \beta}{1+x} dx = 0 \\ \int_0^1 \frac{x^3 - \alpha x^2 - \beta x}{1+x} dx = 0 \end{cases}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{cases} I_2 - \alpha I_1 - \beta I_0 = 0 \\ I_3 - \alpha I_2 - \beta I_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2 \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3 \end{cases}$$

Q40. Justifier l'existence du réel m et l'égalité suivante :

$$m = \|X^2 - \alpha X - \beta\|^2.$$

On ne demande pas de simplifier cette expression.

Solution

$$\int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx = \langle X^2 - aX - b, X^2 - aX - b \rangle = \|X^2 - aX - b\|^2;$$

donc $m = \inf\{\|X^2 - aX - b\|^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, c'est-à-dire que m est le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ et on sait que cette distance peut être définie par $\|X^2 - L(X^2)\|$; ce qui donne

$$m = \|X^2 - aX - b\|^2 = \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx.$$

FIN