

Électromagnétisme Partie II/ Activité 1 - Équations de Maxwell

Important : Les questions marquées avec une * sont pour les élèves à l'aise et en avance ou qui ont déjà fini l'activité.

1 Énoncé des équations de Maxwell et conséquences

On sort maintenant du cadre de la statique, où les champs ne dépendent pas du temps. On est maintenant en régime variable, et des nouveaux termes vont ainsi apparaître dans les équations de Maxwell.

On note ρ la densité volumique de charge (en C/m³), $\vec{j}$ la densité volumique de courant (en A/m²), $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m la permittivité diélectrique du vide et $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6}$ H/m la perméabilité magnétique du vide.

Les quatre équations de Maxwell sont

- Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

- Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

- Maxwell-Thomson

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (3)$$

- Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4)$$

1. Trouver les termes supplémentaires par rapport aux équations de Maxwell vues en statique. Est-ce cohérent avec la notion de « statique » ?
2. Une interprétation des équations statiques est que les charges sont sources de champ $\vec{E}$ et que les courants sont sources de champ $\vec{B}$. Interpréter ainsi les nouveaux termes présents dans les équations.
3. * À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, déduire l'unité du terme $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$. Justifier l'appellation « courant de déplacement ».
4. Parmi les quatre équations de Maxwell, donner le nom de celles qui sont inchangées par rapport à la statique. En déduire si le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère sont toujours valables dans le cas général.
5. * Rappeler la relation entre $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V vue en électrostatique. Montrer que cette relation est en contradiction avec l'une des équations de Maxwell et qu'elle n'est ainsi pas valable en dehors du cadre de l'électrostatique.
6. Justifier la valeur que prennent la densité volumique de charge ρ et de courant $\vec{j}$ dans le vide. En déduire les expressions des équations de Maxwell dans le vide.

2 Forme intégrale des équations de Maxwell

On rappelle les théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes (pas à connaître, à savoir utiliser). Pour tout champ vectoriel $\vec{A}$, surface fermée S (entourant le volume V) et contour fermé $\mathcal{C}$ (entourant la surface S')

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad ; \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{S'} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}' \quad (5)$$

Important : Dans les situations rencontrées en physique cette année, les opérateurs de dérivée temporelle et de dérivée spatiale **commuteront toujours**. De même, on pourra toujours sortir une dérivée temporelle d'une intégrale portant sur l'espace. Exemples :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) \quad ; \quad \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (6)$$

7. Redémontrer le théorème de Gauss.

8. Appliquer le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday pour retrouver la loi de Faraday. On rappelle les expressions de la force électromotrice e (dans le contour fermé $\mathcal{C}$) et du flux du champ magnétique Φ_B (à travers la surface S)

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad ; \quad \Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

9. * Appliquer le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Ampère pour aboutir au théorème d'Ampère généralisé

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacés}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (8)$$

10. Montrer que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée S est nul.

11. * Retrouver l'équation de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. (Indication : prendre la divergence de Maxwell-Ampère).

12. Les équations de Maxwell présentées dans la section précédentes sont appelées « équations locales » par opposition aux « équations intégrales » (théorèmes de Gauss, d'Ampère, loi de Faraday...). Justifier l'appellation « équations locales ».

13. En revenant sur l'expérience faite au début du cours, justifier laquelle des quatre équations locales permet d'expliquer cette expérience. En déduire l'équation intégrale qui permet d'expliquer cette expérience.