

Exercices

Chap.16 : Fonctions de plusieurs variables

1 Domaines de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1.1. On considère le plan muni d'un repère orthonormal. Représenter graphiquement les ensembles de points suivants :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y \geq x\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } y + x - 3 \leq 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } 3y + x - 12 \leq 0 \text{ et } 3x + y - 12 \leq 0\}$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x + y| < 1 \text{ et } x - y < 1\}$

Indiquer ensuite si chacune des ces parties est : ouverte ? fermée ? bornée ?

2 Calcul différentiel

Exercice 2.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = \sin^2(x) + \cos^2(y) + z^2.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
3. Donner le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage du point $A(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)$.

Exercice 2.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = e^{x^2y} \sin(xz).$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .

Exercice 2.3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \arctan(2x + y).$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .

Exercice 2.4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$
2. $g(x, y) = \varphi(xy)$
3. $h(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t) dt$

Exercice 2.5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x, y) = f(x + \varphi(y))$.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$$

3 Équations aux dérivées partielles

Exercice 3.1. A l'aide du changement de variables $\begin{cases} x = u + 2v \\ y = -v \end{cases}$, déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 3.2. On pose $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

A l'aide des coordonnées polaires, déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exercice 3.3. A l'aide du changement de variable $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$, déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x + y$$

Exercice 3.4. On souhaite résoudre sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (E)$$

Pour cela on considère le changement de variables $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ et on définit une nouvelle fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par :

$$f(x, y) = g(u, v) = g\left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

1. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de g .
2. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation :

$$2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0 \quad (E_1)$$

3. Afin de résoudre l'équation (E_1) on pose $h(u, v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$. Quelle est l'équation vérifiée par h ? Résoudre cette équation.

On pourra remarquer que dans l'équation vérifiée par h la variable v n'intervient pas donc l'équation vérifiée par h est "comme" une équation différentielle d'ordre 1 classique.

4. En déduire que f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il existe deux fonctions A et B de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que :

$$f(x, y) = A\left(\frac{x}{y}\right) \sqrt{xy} + B(xy).$$

4 Extremum d'une fonction de deux variables

Exercice 4.1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1.$$

1. (a) Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}^2$.
 (b) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de cet ensemble.
 (c) h possède-t-elle des dérivées partielles premières en $(0, 0)$?
2. (a) Montrer que $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
 (b) h a-t-elle des points critiques dans $\mathcal{U}$?
 (c) Justifier que h est bornée sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ et qu'elle y atteint ses bornes, puis déterminer les points de D en lesquels ces bornes sont atteintes.

Exercice 4.2. On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x - y)^3 - 6xy$$

1. Représenter graphiquement le domaine T .
2. Déterminer les extremums globaux de f sur T . Attention à ne pas développer l'expression de f pour le calcul des dérivées partielles

Exercice 4.3. On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2) e^{-(x^2+y^2)}$$

1. Représenter graphiquement le domaine D .
2. Déterminer les extremums globaux de f sur D .

5 Surfaces

Exercice 5.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \cos(x - y).$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point A de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$.

Exercice 5.2. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et $\mathcal{D}$ la droite définie par $\begin{cases} y = 3x \\ z = -2x \end{cases}$. On pose :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1.$$

1. Quels sont les points réguliers de la surface $\mathcal{S}$?
2. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
3. Soit $A(a, b, c)$ un point régulier de $\mathcal{S}$. Que peut-on dire du vecteur $\nabla_{(a,b,c)} f$ par rapport au plan tangent à $\mathcal{S}$ en A ?
4. À l'aide des trois questions précédentes déterminer le ou les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{S}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$.

Exercice 5.3. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $z^3 = xy$ et $\mathcal{D}$ la droite définie par $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$

Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ qui contiennent la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 5.4. Pour chacune des surfaces suivantes, déterminer une équation cartésienne du plan tangent au point donné, puis étudier la position de la surface par rapport à ce plan.

1. $(S) : z = x^2 - y^2$ en $O(0, 0, 0)$;
2. $(S) : z = x((\ln(x))^2 + y^2)$ en $A(1, 0, 0)$;
3. $(S) : z = x((\ln(x))^2 + y^2)$ en $B(e^{-1}, 1, 2e^{-1})$