
Programme de khôlle 20

Semaine du 16 mars 2026

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentations CCS et CCINP sont autorisées.

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.

Les deux lancers sont supposés indépendants.

On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***lancers()*** qui renvoie les valeurs de X et Y correspondant à une expérience.
2. ***esperances(n)*** qui reçoit en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie les valeurs moyennes de X et Y après réalisation de n expériences.
3. ***graphe()*** qui affiche un graphe contenant les points de coordonnées :
 - $(n; moy_X(n))$ si $moy_X(n)$ désigne la moyenne pour X obtenue par la fonction ***esperances(n)***
 - $(n; moy_Y(n))$ si $moy_Y(n)$ désigne la moyenne pour Y obtenue par la fonction ***esperances(n)***
 - $(n; \frac{91}{36})$ et $(n; \frac{161}{36})$pour $n \in \llbracket 2; 40 \rrbracket$.

2 Pratique calculatoire

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
	0	1	2
1	1/12	0	1/12
2	2/12	1/12	1/12
3	3/12	2/12	1/12

-
- (a) Vérifier que l'on dispose bien d'une loi de probabilité.
 - (b) Déterminer les lois marginales de X et Y.
 - (c) Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
 - (d) Calculer $V[X]$ et $V[Y]$.
 - (e) Calculer $Cov(X, Y)$.
2. Soient deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	0,22	0,20	0,00	0,02
1	0,05	0,11	0,04	0,01
2	0,04	0,07	0,02	0,22

- (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
- (b) Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.
- (c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 2$
- (d) Calculer $Cov(X, Y)$, puis le coefficient de corrélation.

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 1)$.

Exercice 3.2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion vectorielle par rapport au plan F d'équation $2x + y - z = 0$.

Exercice 3.3. Soit E un espace vectoriel euclidien non réduit à 0 . Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \phi_x : E &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto y - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur E .

1. Montrer que ϕ_x est une isométrie vectorielle.
2. Montrer que ϕ_x est une symétrie orthogonale (on précisera $\text{Ker}(\phi_x - \text{Id})$ et $\text{Ker}(\phi_x + \text{Id})$).

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

-
- 1 Isométries
 - 1.1 Groupe orthogonal
 - 1.2 Symétrie orthogonale
 - 1.3 Matrices orthogonales
 - 1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale
 - 2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3
 - 2.1 Orientation d'un espace vectoriel
 - 2.2 En dimension 2
 - 2.3 En dimension 3
 - 3 Matrices symétriques

Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance

- 1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies
 - 1.1 Loi d'un couple
 - 1.2 Lois marginales
 - 1.3 Loi conditionnelle
 - 1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.
 - 1.5 n variables aléatoires
- 2 Indépendance de V.A.R. finies
 - 2.1 Deux variables
 - 2.2 n variables
- 3 Somme et produit de deux V.A.R. finies
 - 3.1 Espérance
 - 3.2 Somme de lois de Bernoulli
 - 3.3 Covariance