

Méthodes

Chap.16 : Fonctions plusieurs variables

Recherche d'extrema d'une fonction de plusieurs variables

Théorème 0.1. *Théorème des bornes atteintes Soient K une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur K .*

Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. il existe (x_m, y_m) et (x_M, y_M) dans K tels que, pour tout $(x, y) \in K$, $f(x_m, y_m) \leq f(x, y) \leq f(x_M, y_M)$.

Théorème 0.2. *Condition nécessaire pour point critique*

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f admet un extremum (i.e. un minimum ou un maximum) local au point $(x_0, y_0) \in U$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f , i.e. $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Remarque 0.3. *Attention, la réciproque de 0.2 est fausse : le gradient peut s'annuler en un point qui n'est ni un minimum ni un maximum (voir exemple du cours, on parle de point selle ou de point col).*

On considère Ω une partie de $\mathbb{R}^2$ non vide, fermée et bornée ainsi qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On cherche les extrema (i.e. minimum et maximum) globaux de f sur Ω .

MÉTHODE :

1. On vérifie que Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue sur Ω . D'après Th.0.1, on en déduit que f admet un minimum (global) et un maximum (global) sur Ω .
2. On cherche à appliquer Th.0.2. Pour cela, on considère l'intérieur U de Ω et on justifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .
On calcule ensuite le gradient de f et on cherche **les points critiques**, i.e. ceux qui annulent le gradient.
3. On étudie ce qui se passe sur le bord $\partial\Omega$ en se ramenant à des études de fonctions d'une seule variable.
4. On compare les candidats obtenus dans les deux étapes précédentes : on cherche la valeur minimale et la valeur maximale parmi toutes celles trouvées.

Exemple 0.4. *Déterminer les extrema de la fonction f définie par :*

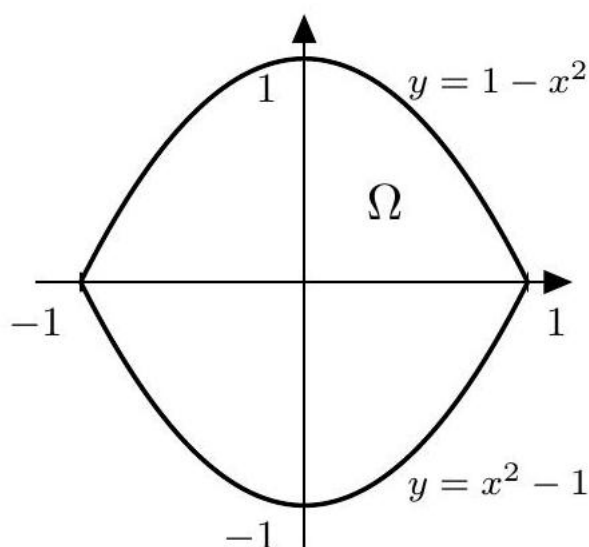
$$f(x, y) = y^2 - yx^2 + x^2$$

$$\text{sur } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

1. La fonction f est polynomiale donc continue sur Ω qui est fermé (car déterminé par des inégalités larges) et borné comme le montre le schéma ci-contre.

On en déduit donc (Th. 0.1) que f est bornée sur Ω et atteint ses bornes.

Autrement dit, f admet un minimum et un maximum sur Ω .



2. Comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.

Les points critiques de f sont les solutions de $\vec{\nabla} f = \vec{0}$, i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2xy + 2x = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1 - y) = 0 \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

De la première équation, on tire deux cas : $x = 0$ ou $y = 1$.

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient ainsi trois points critiques : $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, 1)$ et $(\sqrt{2}, 1)$.

Or le point $(\sqrt{2}, 1)$ n'appartient pas à U car $(\sqrt{2})^2 - 1 < 1 < 1 - (\sqrt{2})^2$ n'est pas vérifiée.

Il en est de même pour $(-\sqrt{2}, 1)$. (On peut aussi placer ces points sur le schéma ci-dessus pour se convaincre.)

Ainsi $(0, 0)$ est le seul point critique de f dans U et en ce point on a $f(0, 0) = 0$.

3. On considère maintenant le bord de Ω .

Il y a deux cas : celui «du haut» (au-dessus de l'axe des abscisses) d'équation $y = 1 - x^2$ et celui «du bas» (en dessous de l'axe des abscisses) d'équation $y = x^2 - 1$.

- Commençons par celui du haut. Un point de coordonnées (x, y) appartient à ce bord si et seulement $y = 1 - x^2$ et $x \in [-1; 1]$. En injectant dans l'expression de f , on doit étudier la fonction g définie par :

$$g(x) = (1 - x^2)^2 - (1 - x^2)x^2 + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1$$

sur l'intervalle $[-1; 1]$. Cette fonction est dérivable sur $[-1; 1]$ en tant que fonction polynomiale et on a

$$\forall x \in [-1; 1], g'(x) = 8x^3 - 4x = 4x(2x^2 - 1)$$

La dérivée s'annule donc pour $x = 0$ et $x = \pm 1/\sqrt{2}$ d'où le tableau de variations :

x	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1
$4x$	-	0	-	0	+
$2x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+
g	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1

On obtient donc comme candidat pour un maximum la valeur 1 atteinte pour $x = -1, 0$ ou 1 , i.e. via l'équation $y = 1 - x^2$, pour les points de coordonnées $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. De même pour un minimum, on a la valeur $1/2$ pour les points $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$ et $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.

- On s'intéresse maintenant au bord du bas d'équation $y = x^2 - 1$. En injectant dans l'expression de $f(x, y)$, on doit étudier la fonction h définie par

$$h(x) = (x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)x^2 + x^2 = 1$$

sur l'intervalle $[-1; 1]$.

Cette fonction étant constante égale à 1, il n'y a aucune étude à faire.

4. D'après les points 2 et 3, le minimum de f est 0 qui est atteint au point $(0,0)$ et le maximum est 1 qui est atteint sur tout le bord du bas (i.e. la courbe d'équation $y = x^2 - 1$) ainsi qu'en $(0,1)$.

Remarque : les points $(-1,0)$ et $(1,0)$ étant les points de jonction entre les deux bords, on peut considérer qu'ils appartiennent aussi au bord du bas.

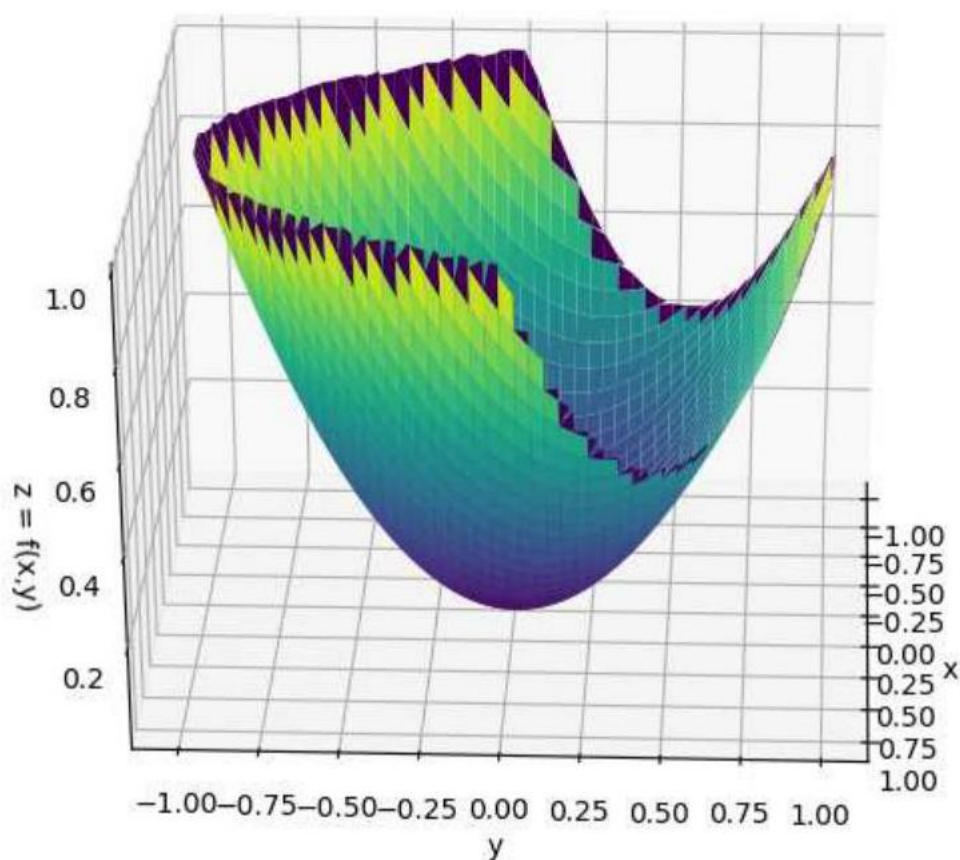


Figure 1 : Représentation 3D du graphe de f (on trace $z = f(x, y)$). Attention à l'orientation des axes : le bord du bas est à gauche et le bord du haut à droite. De plus, le violet-noir en haut sur la moitié gauche devrait être du jaune mais il y a des soucis avec le bord. . .

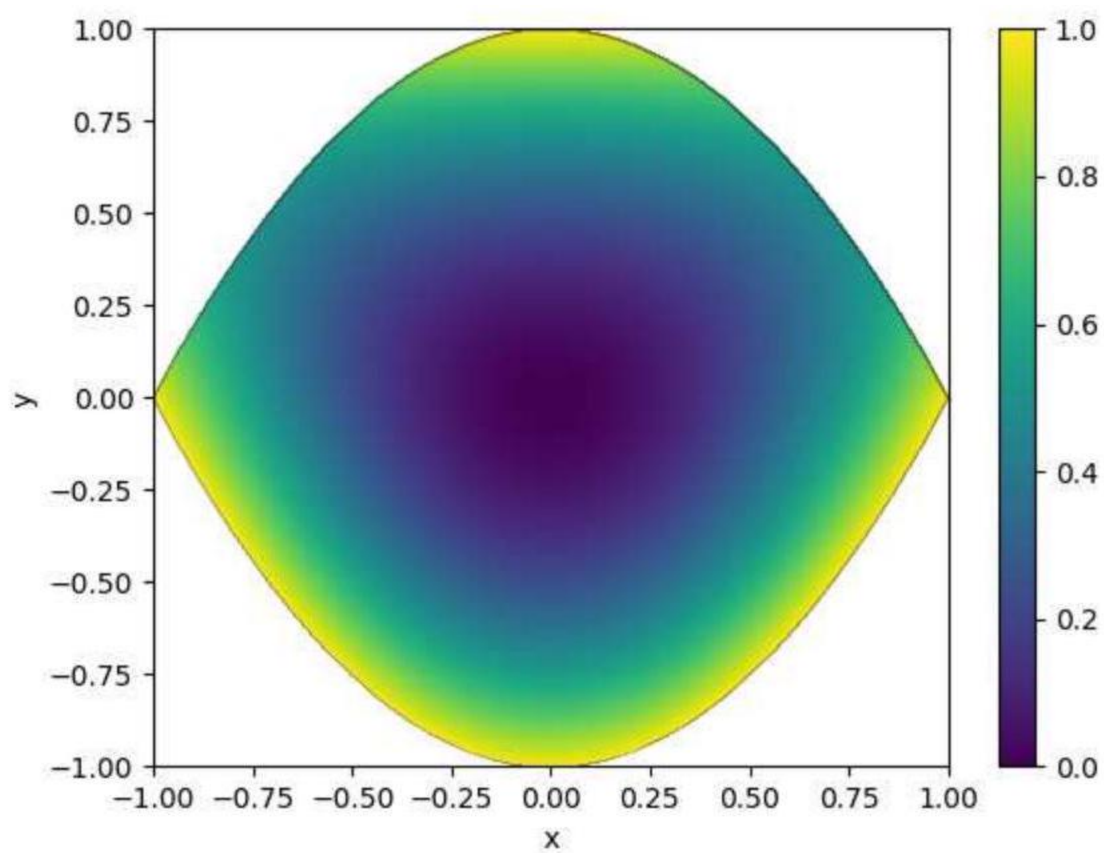


Figure 2 : Une vue du dessus où la coloration permet bien de visualiser l'emplacement des extrema.