

TD 19 - Ondes électromagnétiques

1 Applications de cours - II

On rappelle la formule du double rotationnel, vraie pour tout champ vectoriel $\vec{f}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f})) - \Delta \vec{f} \quad (1)$$

1. Rappeler les expressions des quatre équations de Maxwell. Écrire ensuite les expressions qu'elles prennent dans le vide.
2. On se place dans le vide. Appliquer la formule du double rotationnel au champ magnétique $\vec{B}$ et montrer qu'il vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (2)$$

On donnera l'expression de c en fonction de μ_0 et ε_0 .

3. Pour les expressions suivantes du champ électrique, dire si elles décrivent une onde progressive (/propagative). Si oui, dire dans quelle direction (et quel sens) elle se propage, puis si cette onde est plane, et si elle est monochromatique (/harmonique). On se place en coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

$$\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{E}_2 = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{E}_3 = E_0 f(y - ct) \vec{u}_y \quad (3)$$

$$\vec{E}_4 = \frac{A}{z} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{E}_5 = E_y \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_z \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{E}_6 = \frac{A}{z} g(x + ct) \vec{u}_y \quad (4)$$

4. Pour chacune des ondes précédentes, donner la direction de polarisation de l'onde.
5. Rappeler la relation entre le vecteur d'onde $\vec{k}$ et $\vec{E}$ déduite de l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide, **pour une OPPH**. Dire, pour chacune des expressions précédentes, si elle entre en contradiction avec cette relation.
6. Injecter l'expression de $\vec{E}_1$ dans l'équation de d'Alembert sur le champ électrique afin de redémontrer la relation de dispersion.
7. Donner l'expression de $\vec{k}$ pour $\vec{E}_5$. Utiliser la relation de structure afin de déterminer le champ magnétique associé $\vec{B}_5$.

2 Onde électromagnétique dans un milieu isolant (CCS 2023) - IV

Cet exercice s'intéresse à l'interaction entre l'onde électromagnétique générée par un laser et un milieu isolant non chargé. Le but est de modéliser l'action d'un laser sur la peau, utilisé pour le détatouage. En effet, la peau, composée majoritairement d'eau et de mélanine, les vaisseaux sanguins, composés d'eau et d'hémoglobine, mais aussi les pigments du tatouage peuvent être considérés comme des milieux isolants non chargés.

En régime harmonique et dans un milieu isolant non chargé, on admet que les équations de Maxwell se modifient en remplaçant ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_r étant la permittivité diélectrique relative **complexe** du milieu. On obtient alors un vecteur d'onde $\vec{k}$ potentiellement complexe.

1. Appliquer la formule du double rotationnel afin de trouver la nouvelle forme de l'équation de d'Alembert.

On prendre pour solution à cette équation un onde plane progressive harmonique se propageant selon l'axe x , qu'on écrira en notation complexe $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x))\vec{u}_y$.

2. Montrer que la relation de dispersion s'écrit maintenant

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad (5)$$

$\underline{k}$ étant complexe, on l'écrit sous la forme $\underline{k} = k' - ik''$, où k' et k'' sont des réels et $k' > 0$.

3. Utiliser cette expression du vecteur d'onde dans l'expression de l'OPPH $\vec{E}$. En déduire l'expression du champ réel $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E})$.
4. On suppose que k'' est strictement positif. Décrire l'évolution de l'amplitude de l'onde lors de sa propagation. Que peut on en déduire d'un point de vue énergétique?

On admet que la relation de structure est satisfaite en complexe, permettant ainsi de déduire $\vec{B}$ en fonction de $\underline{k}$ et $\vec{E}$.

5. Montrer alors que

$$\vec{B} = AE_0 \exp(-k''x) \exp(i(\omega t - k'x))\vec{u}_z \quad (6)$$

où on exprimera A en fonction de k' , k'' , i et ω .

6. En déduire que le champ magnétique réel s'exprime

$$\vec{B} = E_0 \exp(-k''x) \left(\frac{k'}{\omega} \cos(\omega t - k'x) + \frac{k''}{\omega} \sin(\omega t - k'x) \right) \vec{u}_z \quad (7)$$