

Interrogation 8 - CORRECTION

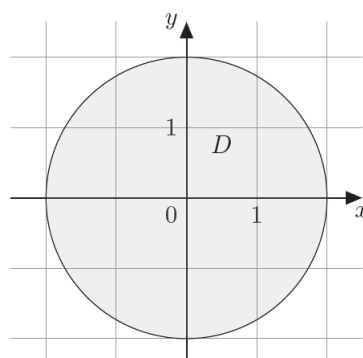
On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ et on considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2) e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Représenter graphiquement le domaine D .
2. Donner le développement limité à l'ordre 1 en $(1, 1)$.
3. Démontrer que sur la partie U , l'intérieur de D , f admet cinq points critiques :

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0).$$

4. Montrer que sur le bord de D , on a $f(x, y) = (12 - x^2) e^{-4} = \varphi(x)$.
5. Déterminer le maximum et le minimum de f sur D .



1.

2. On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en $(1, 1)$ comme composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$.
nous avons besoin des dérivées partielles de f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4xe^{-(x^2+y^2)} + (2x^2 + 3y^2) \times (-2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ &= 2x(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 6ye^{-(x^2+y^2)} + (2x^2 + 3y^2) \times (-2y)e^{-(x^2+y^2)} \\ &= 2y(3 - 2x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

En $(1, 1)$, on a $2x^2 + 3y^2 = 5$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= e^{-2}(4 - 10) = -6e^{-2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= e^{-2}(6 - 10) = -4e^{-2} \end{aligned}$$

NOM :

D'où le développement limité :

$$f(x, y) = 5e^{-2} - 6e^{-2}(x-1) - \frac{1}{2}e^{-2}(y-1)^2 + o(\|(x, y) - (1, 1)\|)$$

3. Pour trouver les points critiques nous devons donc résoudre :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(2 - 2x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y(3 - 2x^2 - 3y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x = 0 \\ 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \\ 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou impossible} \end{aligned}$$

Sur la partie U (qui est l'intérieur de D), f admet cinq points critiques :

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0).$$

On a :

$$f(0, 0) = 0, f(1, 0) = f(-1, 0) = 2e^{-1} \text{ et } f(0, 1) = f(0, -1) = 3e^{-1}$$

4. Sur le bord de D on a $x^2 + y^2 = 4$ donc $y^2 = 4 - x^2$. (x appartient à $[-2; 2]$).

Donc sur le bord de D , on a $f(x, y) = (12 - x^2)e^{-4} = \varphi(x)$.

5. Le tableau de variations de la fonction φ est le suivant :

x	-2	0	2
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	$8e^{-4}$	$12e^{-4}$	$8e^{-4}$

Ainsi sur le bord de D , le maximum de f est $12e^{-4}$ et il est atteint en $(0, 2)$ et $(0, -2)$ et le minimum de f est $8e^{-4}$ et il est atteint en $(-2, 0)$ et $(2, 0)$.

Comme $3e^{-1} > 12e^{-4}$, le maximum de f sur D est $3e^{-1}$ et il est atteint en $(0, 1)$ et $(0, -1)$.

Le minimum de f est 0 et il est atteint en $(0, 0)$.