

Exercices de colle - Ondes électromagnétiques

1 Problème ouvert : Champs associés à un faisceau laser

À l'aide de la fiche technique reproduite sur la figure 1, estimer les valeurs des amplitudes des champs électrique et magnétique créés en sortie de la diode laser utilisée en TP. On pourra utiliser la valeur de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$.

On pourra proposer des hypothèses simplificatrices, décomposer le problème en plusieurs étapes, proposer une valeur numérique raisonnable pour une grandeur que l'on pense manquante (à l'inverse toutes les données fournies ne sont pas forcément utiles).



Diode laser rouge Classe II @635 nm version sur tige bas profil Ref : 203324



Caractéristiques techniques :

- Puissance : 1 mW (classe 2)
- Extrémité : fileté M20
- Maintien : tige D 10mm - L 130mm
- Dimensions tube : diamètre 25mm / longueur 90mm
- Longueur d'onde : 635 nm
- Type : diode laser
- Diamètre faisceau à 5m : 535 mm
- Divergence : 0.9 mRad
- Faisceau en sortie : 1mm
- Température d'utilisation : 10 à 40°C
- Polarisation : linéaire
- Transformateur (fourni) : 6-9V DC

FIGURE 1 – Extrait d'une fiche technique d'une diode laser utilisée en TP

2 Mesure de la concentration de CO₂

Le développement des modèles climatiques repose notamment sur une connaissance fiable de la concentration en CO₂ dans l'atmosphère. Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4,26 μm , à laquelle le spectre d'absorption du CO₂ présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO₂, en nombre de molécules par m³ d'air. Ce dispositif est schématisé figure 2

On modélise le faisceau laser par un faisceau cylindrique, de section S , au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique, se déplaçant dans la direction des z croissants, et de polarisation rectiligne selon $\vec{u}_x$.

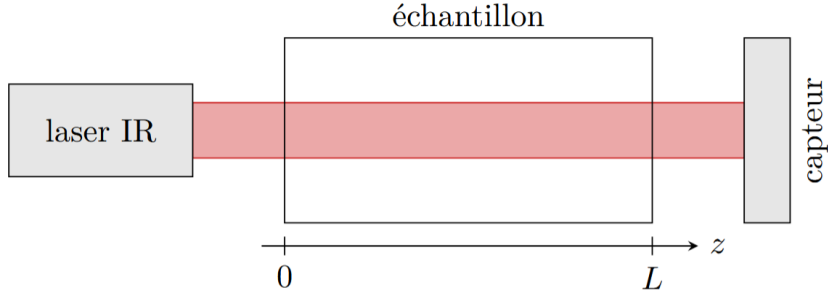


FIGURE 2 – Schéma du dispositif de mesure de la concentration en CO_2 .

1. On note l'amplitude du champ électrique E_0 , sa pulsation ω et son nombre d'onde k . Donner l'expression de $\vec{E}$.
2. En déduire l'expression de $\vec{B}$ puis celle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.
3. Les capteurs sont sensibles à l'intensité surfacique que l'on notera I , définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting de l'onde sur toute la section S du faisceau

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \right\rangle \quad (1)$$

Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.

4. Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance $p = \sigma I$ où σ est une constante **connue** homogène à une surface. On note n le nombre de molécules de CO_2 par m^3 d'air. En régime stationnaire, en raisonnant sur une tranche infinitésimale de largeur dz , montrer que l'intensité vérifie l'équation

$$\frac{dI}{dz} + \sigma n I = 0 \quad (2)$$

5. On note $I_0 = I(z = 0)$. Donner $I(z)$.
6. L'appareil mesure l'absorbance, définie par

$$A = \ln \left(\frac{I_0}{I(z = L)} \right) \quad (3)$$

Montrer que si l'on connaît la valeur de A alors on peut en déduire la valeur de n .

3 Onde électromagnétique dans un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique (métal) est caractérisé par sa conductivité γ . On admet qu'à l'intérieur du conducteur, la densité volumique de courant $\vec{j}$ suit la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (4)$$

On admet également que le conducteur reste électriquement neutre à tout instant, i.e. $\rho = 0$. On pourra utiliser la formule du double rotationnel, vraie pour tout champ vectoriel $\vec{f}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f})) - \Delta \vec{f} \quad (5)$$

1. Écrire les quatre équations de Maxwell dans le conducteur ohmique. Dans notre cas, on supposera que

$$\vec{j} \gg \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

2. Appliquer la formule du double rotationnel au champ électrique $\vec{E}$ et montrer que ce dernier vérifie l'équation

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \gamma} \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{0} \quad (7)$$

En se rappelant que pour un champ ne dépendant que de x , $\vec{\Delta} \vec{E} = \partial^2 \vec{E} / \partial x^2$ et si on note $D = 1/\mu_0 \gamma$, quelle équation reconnaît-on ?

3. On prend comme solution à cette équation une onde plane progressive monochromatique se déplaçant vers les x croissants et polarisée selon $\vec{u}_y$. Au vu de cette description, donner l'expression de $\vec{E}$.
4. On se place en notations complexes, on pose

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \quad (8)$$

avec un nombre d'onde $\underline{k}$ potentiellement complexe. Injecter cette expression dans l'équation (7) et en déduire la relation de dispersion suivante

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega \quad (9)$$

5. En admettant que $((1-i)/\sqrt{2})^2 = -i$ montrer que l'on peut écrire

$$\underline{k} = \frac{1-i}{\delta} \quad (10)$$

on exprimera δ en fonction de μ_0 , γ et ω .

6. En déduire que l'onde réelle s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \exp(-x/\delta) \cos(\omega t - x/\delta) \vec{u}_y \quad (11)$$

Commenter cette expression. Discuter de la limite du conducteur parfait, $\gamma \rightarrow +\infty$.