

TD 20 - Ondes électromagnétiques, aspects énergétiques

1 Énergie stockée dans un solénoïde - II

On considère un solénoïde « infini » de longueur l , de section S , composé de N spires, parcouru par un courant d'intensité I constante. La densité linéique de spires n est ainsi $n = N/l$.

On note μ_0 la perméabilité magnétique du vide et $\vec{u}_z$ l'axe du solénoïde. On admet (cf. magnétostatique) que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z \quad (1)$$

1. Que vaut le champ électrique ici ?
2. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} .
3. En déduire l'expression de l'énergie $\mathcal{E}$ stockée dans le solénoïde.
4. En admettant que l'inductance L du solénoïde est donnée par

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \quad (2)$$

exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de L et I .

2 Vecteur de Poynting et bilan d'énergie - III

On considère une onde plane progressive électromagnétique se déplaçant vers les x croissants. On note $\vec{\Pi} = \Pi \vec{u}_x$ le vecteur de Poynting associé et u_{em} la densité d'énergie électromagnétique.

On cherche à faire un bilan d'énergie électromagnétique sur une tranche infinitésimale d'espace de section S et d'épaisseur dx , schématisée sur la figure 1. On considère que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est uniforme sur

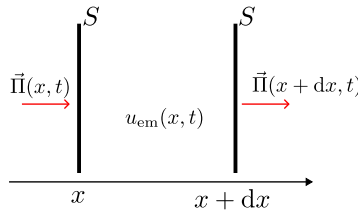


FIGURE 1 – Système infinitésimal étudié

la surface S .

1. Donner les expressions de l'énergie entrante $\mathcal{E}_e$ et sortante $\mathcal{E}_f$ dans le système pendant le temps dt en fonction de $\vec{\Pi}$, S et dt .
2. Donner l'expression de l'énergie $\mathcal{E}(t)$ contenue dans la tranche à l'instant t . Donner également l'expression de $\mathcal{E}(t + dt)$.
3. Faire un bilan d'énergie sur la tranche et en déduire que

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

4. *On admet la formule suivante, vraie pour tous champs vectoriels $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \quad (4)$$

Utiliser cette formule ainsi que les équations de Maxwell afin de démontrer l'équation suivante, appelée bilan local de Poynting

$$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (5)$$

Au vu de l'équation (3) interpréter chaque terme de cette formule.

3 Propagation et vecteur de Poynting - III

On se place dans la base cartésienne (x, y, z) . On considère l'onde électromagnétique suivante, se déplaçant dans le vide

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_z \quad (6)$$

1. Dire si cette onde est plane, progressive, monochromatique. Si elle est progressive, donner la direction et le sens de propagation. Donner sa direction de polarisation.
2. En injectant l'expression de cette onde dans l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (7)$$

trouver la relation de dispersion, reliant ici k , ω et a .

3. On admet que pour qu'il y ait propagation k doit être réel. En déduire une condition sur ω .
4. * Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser ici la relation de structure afin de déterminer le champ magnétique $\vec{B}$. Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday afin de trouver l'expression de $\vec{B}$.
5. On admet que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ s'exprime

$$\vec{\Pi} = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x + \frac{\pi}{2\mu_0 \omega a} E_0^2 \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad (8)$$

En moyenne, cette onde transporte-t-elle de l'énergie ? Si oui, dans quelle direction ?