

Devoir surveillé n°5 - Transport et génération d'électricité

21/03/2026

Durée 4 heures - Calculatrices autorisées

Ce problème est composé de 2 parties indépendantes, elles mêmes composées de sous-parties souvent indépendantes.

Les producteurs et les transporteurs regroupent l'ensemble des moyens mis en œuvre pour produire et acheminer l'électricité jusqu'aux consommateurs. Nous allons dans ce sujet nous intéresser tout d'abord aux moyens de transport de l'électricité en France, puis dans une seconde partie nous étudierons la création de matériaux thermoélectriques, utiles pour alimenter des logements isolés du réseau électrique.

1 Transport de l'électricité en France

En France, le réseau électrique alimente nos habitations avec une tension de 230 V. Cependant, l'électricité est majoritairement transportée par les lignes à haute tension, où la tension est de l'ordre de 200 kV.

1.1 Intérêt du transport en haute tension

Nous allons illustrer l'intérêt du transport électrique à haute tension. On cherche à quantifier les pertes Joule occasionnées lors du transport d'une puissance électrique $P = 100$ MW fournie par le poste de distribution, sur une distance $l = 100$ km de ligne électrique, que l'on considérera comme purement résistive.

1. Déterminer le courant I_1 circulant dans la ligne lorsque la tension vaut $U_1 = 400$ kV. De même, déterminer I_2 pour $U_2 = 100$ kV.
2. On suppose que la densité volumique de courant $\vec{j}$ est uniforme sur la section du câble. Dans les câbles de transport, on a généralement $j = 0.7$ A/mm². Déterminer les valeurs numériques des sections S_1 et S_2 permettant respectivement le passage des courant I_1 et I_2 .
3. Le matériau utilisé pour les câbles de transport est de l'aluminium, plus léger et moins cher que le cuivre. Sa conductivité électrique est $\gamma = 38 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. On admet que la résistance du câble est donnée par $R = l/(\gamma S)$. Commenter le sens physique de cette formule.
4. Calculer les valeurs des résistances R_1 et R_2 des lignes de transport de sections respectives S_1 et S_2 .

5. Pour les deux lignes envisagées, déterminer les valeurs numériques des pertes par effet Joule notées P_{j1} et P_{j2} .

Le rendement η du transport d'électricité est défini comme le rapport entre la puissance utile disponible après transport sur la ligne et la puissance fournie par le poste de distribution.

6. Calculer alors le rendement η du transport d'électricité dans les deux cas. Conclure.

1.2 Utilisation d'un montage à ALI

Afin d'augmenter la tension en entrée de ligne électrique, on pourrait penser utiliser un montage amplificateur à base d'amplificateur linéaire intégré (ALI). Le montage envisagé est présenté sur la figure 1.

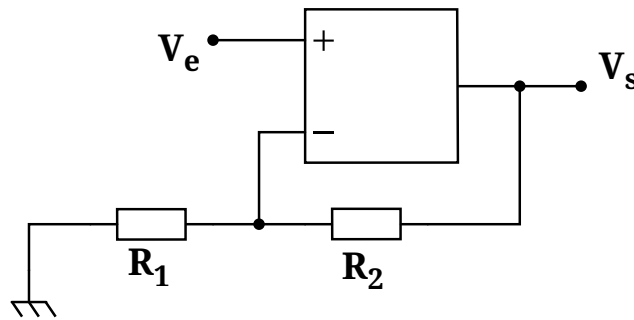


FIGURE 1 – Montage envisagé

L'ALI est supposé parfait et de gain infini.

7. Par un argument simple, justifier le mode de fonctionnement de l'ALI.

8. Exprimer la fonction de transfert de l'ALI $H = V_s/V_e$ en fonction de R_1 et R_2 .

9. Au vu de cette fonction de transfert, nommer ce montage et dire si il peut a priori remplir le rôle suggéré en début de sous partie.

10. Donner la raison principale qui fait que ce montage à ALI n'est absolument pas adapté à l'élévation de tension en début de ligne électrique.

1.3 Étude d'un transformateur torique

On étudie à présent un modèle simplifié de transformateur schématisé en figure 1. Il est constitué d'un matériau torique d'axe (Oz) à **section carrée** de côté a et de rayon intérieur R . L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ illustrée pour un point M quelconque sur le schéma.

Le bobinage dit « primaire » noté 1 est enroulé en N_1 spires autour de ce tore. Il est parcouru par un courant d'intensité i_1 dont l'orientation est indiqué sur la figure 2. Le bobinage dit « secondaire » noté 2 est, de la même manière, enroulé en N_2 spires autour de ce tore et est parcouru par un courant d'intensité i_2 , également orienté sur le schéma. On notera μ_0 la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$.

Important : Malgré ce que montre le schéma, les N_1 spires du circuit 1 sont réparties **uniformément tout autour** du tore. Il en est de même pour le circuit 2.

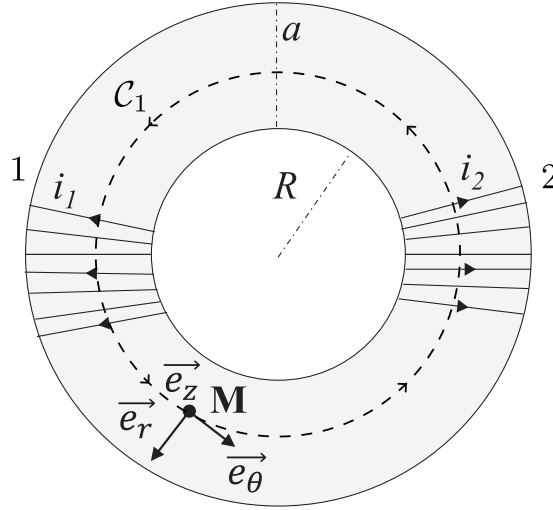


FIGURE 2 – Vue du dessus du transformateur. Le contour $\mathcal{C}_1$ entoure les N_1 spires du circuit 1.

11. Justifier soigneusement que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé à l'intérieur du tore par le courant circulant dans 1 est de la forme :

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_1(r, z) \vec{e}_\theta. \quad (1)$$

Dans la suite on supposera qu'à l'intérieur du tore le champ ne dépend pas de la coordonnée z , $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{e}_\theta$.

12. Décrire le contour fermé $\mathcal{C}_1$ dessiné sur la figure 2, on donnera notamment son orientation.

13. En appliquant le théorème d'Ampère au contour $\mathcal{C}_1$, démontrer que le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le circuit 1 en tout point à l'intérieur du tore est donné par :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta. \quad (1)$$

14. Montrer que le flux magnétique φ du champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers une spire carrée de côté a du circuit 1 est

$$\varphi = \frac{\mu_0 N_1 i_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \quad (2)$$

15. En déduire le flux propre total Φ_p du champ $\vec{B}_1$ au travers des N_1 spires du circuit 1.

16. Rappeler la définition de l'inductance propre L (ou coefficient d'auto-inductance).

17. En déduire que l'inductance propre L_1 du circuit 1 est donnée par :

$$L_1 = \frac{N_1^2 a \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \quad (3)$$

18. Par analogie, quelle est l'expression de l'inductance propre L_2 du circuit 2 ?

19. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle inductance M .

20. Démontrer que ce coefficient M est donné ici par :

$$M = \frac{N_1 N_2 a \mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right) \quad (4)$$

21. Rappeler la loi de Faraday. La redémontrer en partant de l'une des quatre équations de Maxwell. On rappelle le théorème de Stokes, valable pour tout champ vectoriel $\vec{A}$ et contour fermé $\mathcal{C}$ entourant la surface S

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

On modélise notre situation par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure 3.

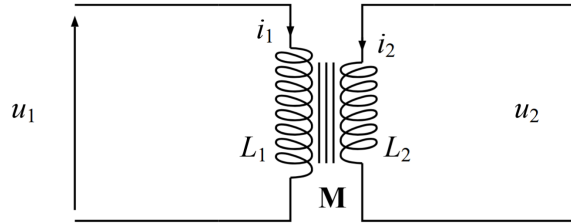


FIGURE 3 – Schéma électrique équivalent

22. À l'aide de la loi de Faraday, justifier l'équivalence mathématique entre la situation physique étudiée et ce schéma électrique.

23. En utilisant la figure 3, la résistance des bobinages étant négligée, exprimer la tension u_1 aux bornes du primaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_1 et M .

24. Faire de même pour la tension u_2 aux bornes du secondaire en fonction des dérivées par rapport au temps de i_1 et i_2 et des coefficients L_2 et M .

25. En déduire que l'on a la relation suivante :

$$u_1 = \frac{L_1}{M} u_2 + \frac{M^2 - L_1 L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \quad (6)$$

26. Prouver que cette relation se simplifie pour faire apparaître ce que l'on appelle le rapport de transformation, défini comme le rapport des tensions du secondaire et du primaire :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (7)$$

27. Expliquer alors comment les transformateurs constituent des éléments centraux de la chaîne de transport de l'électricité.

28. Le fonctionnement d'un transformateur est-il possible pour des signaux continus ? Justifier votre réponse.

29. Donner un exemple de phénomène physique, non pris en compte ici, menant à des pertes lors de l'utilisation d'un transformateur.

1.4 Propagation d'une onde électromagnétique

La propagation du signal électrique dans les câbles vient de la propagation d'une onde électromagnétique, décrite par les champs $(\vec{E}, \vec{B})$. Nous nous restreindrons ici à l'étude simplifiée de la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

On admettra la formule suivante, vraie pour tout champ vectoriel $\vec{f}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f})) - \Delta \vec{f} \quad (8)$$

30. Écrire la forme générale des quatre équations de Maxwell. Que deviennent ces équations dans le vide ?

31. En utilisant la formule (8), montrer que l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ dans le vide est

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (9)$$

où c est une constante, qu'on exprimera en fonction de ε_0 et μ_0 et dont on donnera l'unité et la signification.

On considère une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de pulsation ω . Les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ associés à cette onde sont données, en coordonnées cartésiennes (x, y, z) , par les relations

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \quad ; \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u} \quad (10)$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire inconnu.

32. Donner la direction et le sens de propagation de l'onde décrite par le champ électrique. Dire si cette onde est transverse ou longitudinale.

33. Justifier que cette onde est plane, progressive et monochromatique.

34. En injectant l'expression de l'OPPM dans l'équation de propagation, retrouver la relation de dispersion liant ω , c et k .

35. En utilisant la relation de structure, trouver l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ afin d'exprimer B_0 et $\vec{u}$.

2 Thermoélectricité et tellurure de bismuth

Afin d'alimenter des habitations isolées en électricité, on peut utiliser des générateurs thermoélectriques produisant de l'électricité à partir d'une différence de température. Cette seconde partie s'intéresse à la production de tellure de bismuth $\text{Bi}_2\text{Te}_3(\text{s})$, un matériau thermoélectrique intervenant dans certains thermogénérateurs.

On élabore, par électrodéposition sur un substrat adapté, des petites cellules de Bi_2Te_3 , de diamètres voisins de $50 \mu\text{m}$, se comportant comme des microgénérateurs thermoélectriques dont la polarité dépend du dopage du matériau.

Pour tout le problème, on utilisera la forme approchée à $T = 298 \text{ K}$:

$$\frac{RT}{F} \ln(10) \approx 0.06 \text{ V}$$

où $F = 96\,500\text{ C/mol}$ est la constante de Faraday représentant la charge d'une mole d'électrons. On va donc s'intéresser aux comportements électrochimique du bismuth et du tellure.

2.1 Diagramme potentiel-pH du bismuth

Le diagramme simplifié du bismuth est tracé sur la figure 4 à $T = 298\text{ K}$. Sur une frontière, la concentration de toutes les espèces **dissoutes** contenant du tellure est égale à la concentration de travail $C_0 = 0.01\text{ mol/L}$. Ce diagramme fait intervenir les espèces :

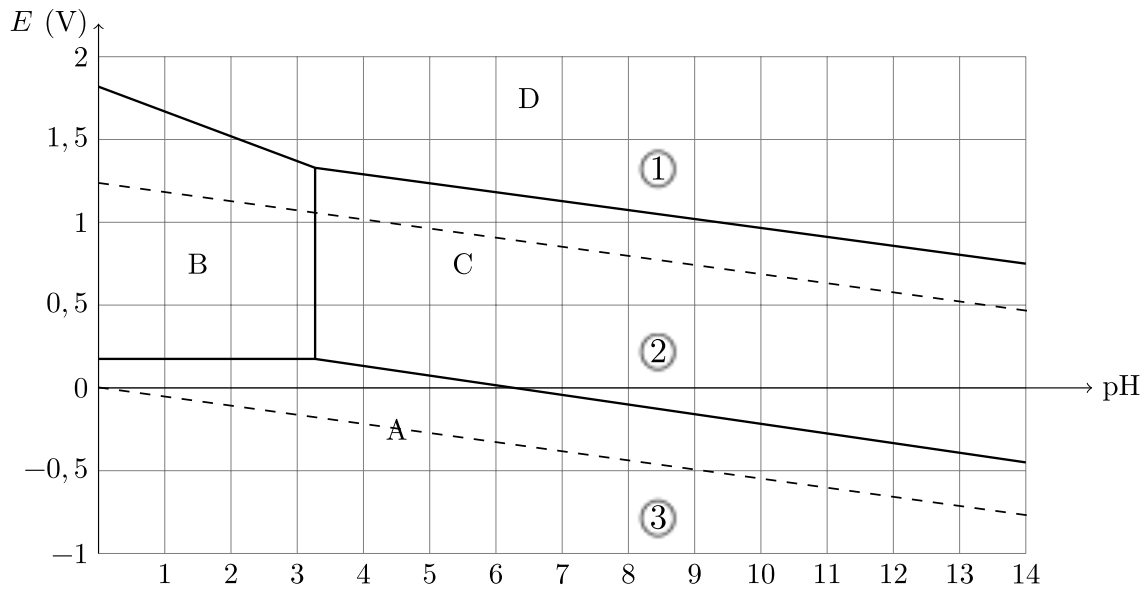


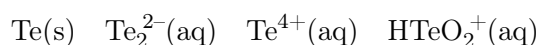
FIGURE 4 – Diagramme potentiel-pH du bismuth (en trait pleins), superposé à celui de l'eau (en trait pointillés). Les lettres correspondent aux domaines du bismuth et les chiffres aux domaines de l'eau.

36. Donner le nombre d'oxydation de l'élément bismuth dans chacune des espèces envisagées.
37. Identifier les espèces A et D sur le diagramme. On justifiera la réponse.
38. Écrire l'équation d'équilibre entre les espèces B et C. À l'aide de cette équation identifier, en le justifiant, les espèces B et C sur le diagramme.
39. À l'aide du diagramme, calculer la constante d'équilibre de dissociation K_s de $\text{Bi}_2\text{O}_3(\text{s})$.
40. À l'aide du diagramme, déterminer le potentiel standard du couple $\text{Bi}^{3+}(\text{aq})/\text{Bi}(\text{s})$.
41. Écrire l'équation de la demi-réaction électronique entre les espèces C et A. À l'aide de la formule de Nernst, déterminer la pente de la frontière entre ces deux espèces.
42. Préciser pour chacun des domaines A, B, C et D s'il s'agit d'un domaine d'existence ou de prédominance. Expliquer qualitativement la différence entre les deux.

43. L'eau $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ intervient dans les deux couples rédox $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ et $\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})$. Écrire la demi-réaction électronique associée à chaque couple. Associer à chacune des espèces le domaine correspondant (de 1 à 3)
44. En utilisant le diagramme potentiel-pH du bismuth superposé à celui de l'eau, discuter la stabilité du bismuth dans l'eau.
45. Écrire l'équation d'oxydoréduction entre le bismuth solide et le dioxygène gazeux, en solution aqueuse à $\text{pH} = 1$.
46. Pour chacun des domaines de A à D, dire si il s'agit d'un domaine d'immunité, de corrosion ou de passivation.

2.2 Diagramme potentiel-pH du tellure

On étudie le diagramme simplifié du tellure faisant intervenir :



tracé sur la figure 5 pour la température $T = 298 \text{ K}$. Sur une frontière, la concentration de toutes les espèces **dissoutes** contenant du tellure est égale à la concentration de travail $C_0 = 0.01 \text{ mol/L}$. Le point d'intersection des frontières A', B', C' a pour abscisse 0,37 et pour ordonnée 0,537 V. L'ion

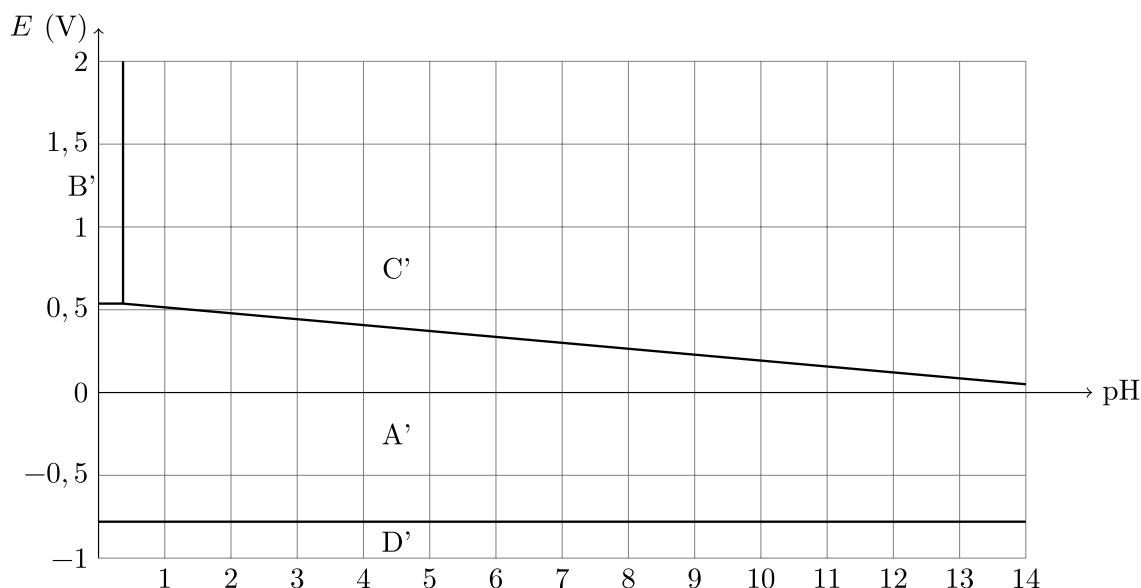


FIGURE 5 – Diagramme potentiel-pH de l'élément tellure

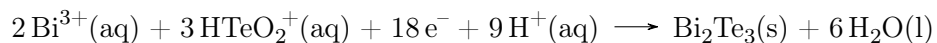
$\text{Te}^{4+}(\text{aq})$ appartient au couple acide-base $\text{Te}^{4+}(\text{aq})/\text{HTeO}_2^+(\text{aq})$

47. Donner le nombre d'oxydation de l'élément tellure dans chacune des espèces.
48. Écrire l'équation de l'équilibre acido-basique du couple $\text{Te}^{4+}/\text{HTeO}_2^+$. Établir l'espèce prédominante de ce couple en fonction des valeurs du pH. Représenter ces domaines sur un diagramme de prédominance gradué en pH où l'on fera intervenir le $\text{p}K_a$
49. À partir du diagramme, déterminer la valeur du $\text{p}K_a$ de ce couple.

50. Identifier, en le justifiant, les espèces A', B', C', D'.
51. À l'aide du diagramme, déterminer le potentiel standard du couple B'/A'.
52. Déterminer les équations des frontières A'/C' et A'/D'. En déduire que lorsque C_0 diminue la frontière entre A' et D' est translatée vers le haut et celle entre A' et C' est translatée vers le bas. Lorsque les deux frontières se coupent, que peut-on prévoir pour l'espèce A'? Écrire l'équation de la réaction chimique correspondante, et nommer le type de réaction.

2.3 Synthèse des résultats

53. Le dépôt électrolytique du tellure de bismuth résulte de la demi-réaction :



Cette réaction est **forcée** par l'apport d'énergie électrique. À l'aide des diagrammes précédents, déterminer le domaine de pH dans lequel on doit se placer pour réaliser cette réaction.