



## 1.2 Notations pratiques

Dans les circuits nous représenterons l'ALI ainsi (figure 2).

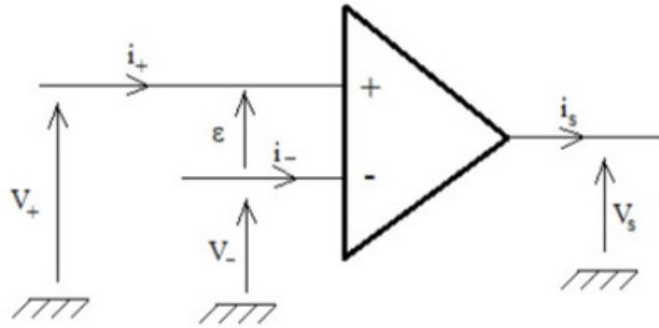


FIGURE 2 – Représentation de l'ALI dans les circuits.

On note  $V^+$  et  $V^-$  les potentiels aux entrées + (non inverseuse) et - (inverseuse) et  $\varepsilon = V^+ - V^-$  la différence de potentiel entre les deux entrées. On note  $V_s$  le potentiel (la tension) de sortie et  $i_s$  le courant de sortie.  $i^+$  et  $i^-$  sont appelés *courants de polarisation*.

Dans certains circuits, on connecte la sortie à l'une des deux entrées : on parle alors de **rétroaction**.

La tension de sortie ne peut dépasser (en valeur absolue) la tension d'alimentation, on a

$$-15 \text{ V} \leq V_s \leq 15 \text{ V} \quad (1)$$

Le courant de sortie  $i_s$  est lui aussi limité à quelque dizaines de mA.

## 1.3 Modèle de l'ALI idéal

Cette année nous nous placerons dans le cadre du modèle de l'ALI idéal et supposons toujours que les courants de polarisations sont nuls

$$i^+ = i^- = 0. \quad (2)$$

Un ALI est un composant **amplificateur** et **passé-bas**. Il amplifie la différence de potentiel  $\varepsilon$  entre ses deux entrées. On note son facteur d'amplification  $\mu_0$  et son temps caractéristique  $\tau$ .

**OdG :**

$$\mu_0 \sim 1 \times 10^4 - 1 \times 10^6 \quad ; \quad \tau \sim 10 \text{ ms} \iff f_{\text{ALI}} = 1/\tau \sim 1 \times 10^2 \text{ Hz} \quad (3)$$

On remarque que son facteur d'amplification est très grand (au moins 10 000) mais que sa fréquence de coupure est très faible (100 Hz). On distingue deux régimes de fonctionnement pour l'ALI :

- Régime linéaire : dans ce cas là la relation entre sortie et entrée est

$$V_s(t) + \tau \frac{dV_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon(t) = \mu_0 (V^+(t) - V^-(t)) \quad (4)$$

(mettre en lumière l'amplification et le caractère passé-bas).

- Régime saturé : si l'équation précédente prédit une tension de sortie supérieure à la tension de saturation  $V_{\text{sat}} \sim 15 \text{ V}$  l'ALI ne peut pas donner une tension si grande en sortie et il **sature**. Dans ce cas là,  $V_s = \pm V_{\text{sat}}$ . Voir figure 3.

## 1.4 Régime linéaire

Le comportement temporel en régime linéaire est donné par

$$V_s(t) + \tau \frac{dV_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon(t) \quad (5)$$

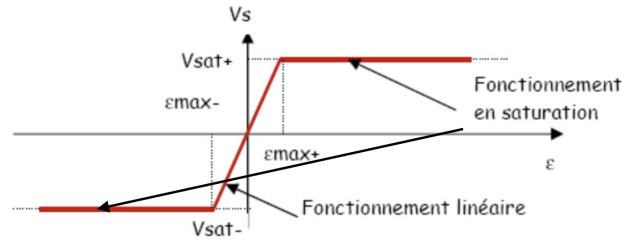


FIGURE 3 – Caractéristique de l'ALI en régime continu.

En régime sinusoïdal  $V_s(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , et on passe en notation complexe

$$V_s(t) = V_0 \exp(j\omega t + \varphi_0) \quad (6)$$

ainsi

$$\frac{dV_s}{dt} = j\omega V_s \quad (7)$$

d'où

$$V_s + \tau j\omega V_s = \mu_0 \varepsilon \quad (8)$$

On peut donc calculer la fonction de transfert de l'ALI

$$H(\omega) = \frac{V_s}{\varepsilon} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau} \quad (9)$$

on reconnaît ici le caractère amplificateur et passe-bas de l'ALI.

**Remarque :** En régime continu, ou a faible fréquence, l'équation (5) devient

$$V_s = \mu_0 \varepsilon \quad (10)$$

et on fait parfois l'approximation que  $\mu_0 = +\infty$ . Comme  $V_s$  est borné, ceci revient à dire que  $\varepsilon = 0$ . Cela peut être une approximation utile pour des calculs sur des montages classiques à ALI.

## 1.5 Régime saturé

Dans ce cas là,  $V_s = \pm V_{\text{sat}}$ . Le signe de la tension de sortie est celui de la différence de potentiel en entrée :

- $V_s = V_{\text{sat}}$  si  $\varepsilon > 0$ ,
- $V_s = -V_{\text{sat}}$  si  $\varepsilon < 0$ .

## 2 Montages classiques

Dans la plupart des cas on cherchera à connaître la tension de sortie du montage  $V_s$  en fonction de la tension d'entrée  $V_e$  et des caractéristiques du circuit.

### 2.1 Suiveur

Un montage suiveur sert à adapter l'impédance entre deux blocs d'un circuit. Par exemple on branche un générateur de tension  $u_g$  d'impédance de sortie  $R_g = 50 \Omega$  sur une résistance  $R_e$  (figure 4). On souhaite que la tension aux bornes de la résistance, qu'on notera  $u_e$  soit proche de  $u_g$ .

Or une simple loi des mailles nous donne

$$u_g - R_g i - R_e i = 0 \quad (11)$$

Et

$$u_e = R_e i \quad (12)$$

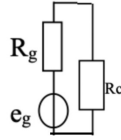


FIGURE 4 – Problème d'adaptation d'impédance

D'où

$$i = \frac{u_g}{R_e + R_g} \quad (13)$$

$$u_e = \frac{u_g R_e}{R_e + R_g} \quad (14)$$

Si  $R_e \sim R_g$  alors  $u_e \sim 0.5u_g$ . Dans ces cas là on utilise un suiveur.

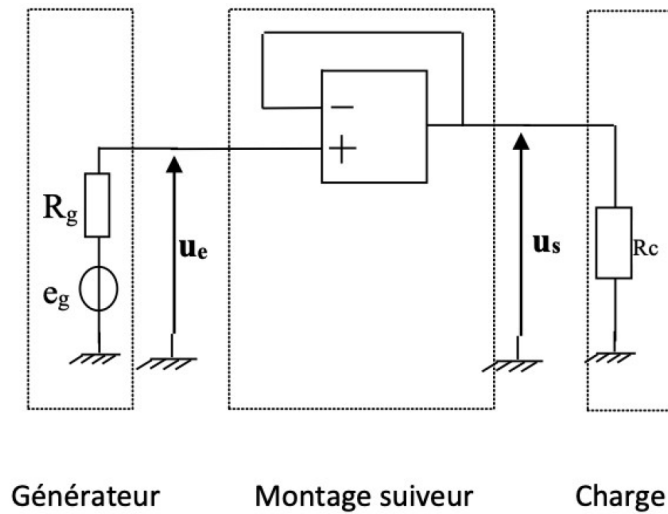


FIGURE 5 – Montage suiveur

On utilise le modèle de l'ALI idéal, ainsi

$$i^+ = i^- = 0 \quad (15)$$

Nous supposons que l'on est en régime linéaire et nous faisons l'approximation que l'ALI est de gain infini, ainsi  $\varepsilon = 0$ . Ainsi

$$V^+ = V^- \quad (16)$$

Or, on remarque que

$$V^+ = V_e \quad ; \quad V^- = V_s \quad (17)$$

Enfinement, pour le montage suiveur dans l'approximation de l'ALI idéal de gain infini

$$V_e = V_s \quad (18)$$

**Dépendance en fréquence :** Intéressons nous maintenant au comportement fréquentiel du montage suiveur en ne prenant plus l'approximation  $\mu_0 = +\infty$ . On se place toujours en régime linéaire. On cherche la fonction de transfert  $H(\omega) = V_s/V_e$ . On utilise alors la relation

$$V_s + \tau \frac{dV_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon = \mu_0 (V_e - V_s) \quad (19)$$

On passe en notation complexe,  $V_s = V_0 \exp(j\omega t + \varphi_0)$  et ainsi

$$V_s + j\omega\tau V_s + \mu_0 V_s = +\mu_0 V_e \implies V_s(1 + j\omega\tau + \mu_0) = \mu_0 V_e \quad (20)$$

Et ainsi

$$H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu_0}{\mu_0 + 1 + j\omega\tau} \simeq \frac{\mu_0}{\mu_0 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{\mu_0}} \quad (21)$$

On retrouve que pour  $\mu_0 = +\infty$ ,  $H(\omega) = 1$ . On peut calculer son module

$$|H(\omega)| \simeq \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega^2\tau^2}{\mu_0^2}}} \quad (22)$$

On voit que à hautes fréquences le suiveur ne suit plus! Trouvons un ordre de grandeur de la pulsation de coupure  $\omega_c$ . Cette décroissance se fait sentir lorsque

$$\frac{\omega_c^2\tau^2}{\mu_0^2} \sim 1 \implies \frac{\omega_c\tau}{\mu_0} \sim 1 \implies \omega_c \sim \frac{\mu_0}{\tau} \sim \frac{1 \times 10^5}{10 \times 10^{-3}} \quad (23)$$

Ainsi

$$\omega_c \sim 1 \times 10^7 \text{ rad/s} \implies f_c = \omega_c/2\pi \sim 1 \text{ GHz}. \quad (24)$$

## 2.2 Amplificateur non inverseur

Le but de ce montage est d'amplifier le signal, ainsi on s'attend à ce que  $|V_s| > |V_e|$ . Non inverseur veut dire que les tensions d'entrée et de sortie sont de même signe. Le montage est représenté figure 6.

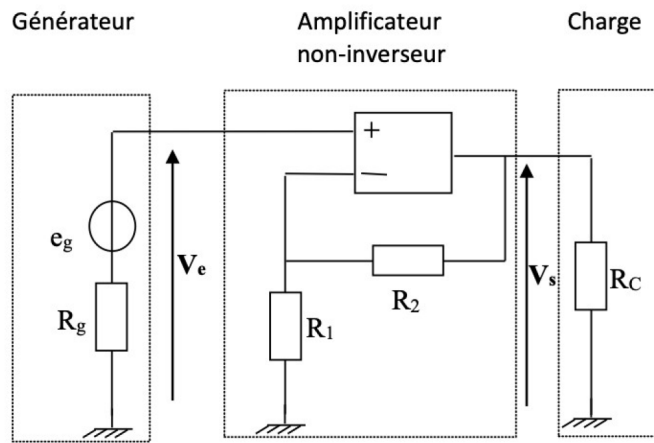


FIGURE 6 – Montage de l'amplificateur non inverseur

On cherche à trouver le rapport  $V_s/V_e$ .

### 2.2.1 Dans l'approximation de l'ALI de gain infini

De la même manière que précédemment, faisons l'approximation de l'ALI idéal de gain infini, on a donc

$$i^+ = i^- = 0 \quad ; \quad V^+ = V^-, \quad (25)$$

on a également  $V^+ = V_e$ . On cherche à exprimer  $V^-$  en fonction de  $V_s$ . Comme  $i^- = 0$ , on utilise un diviseur de tension

$$V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \quad (26)$$

D'où

$$V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \quad (27)$$

Le rapport entre tension de sortie et d'entrée pour le montage amplificateur non inverseur dans l'approximation de l'ALI idéal de gain infini est donc

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} > 1. \quad (28)$$

On a bien un montage amplificateur et non inverseur.

**OdG** : on prends  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  et  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  ainsi  $V_s/V_e \simeq 100$ .

## 2.2.2 Stabilité

De la même manière que pour le suiveur, abandonnons l'hypothèse du gain infini tout en restant en régime linéaire. Avant de s'intéresser à la fonction de transfert, nous allons nous intéresser au comportement temporel de la tension de sortie, **pour une tension d'entrée constante**.

$$V_s + \tau \frac{dV_s}{dt} = \mu_0 \left( V_e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \right) \quad (29)$$

Ainsi

$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{V_s}{\tau} \left( 1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{\mu_0}{\tau} V_e. \quad (30)$$

On note

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (31)$$

On cherche la solution de cette équation différentielle du premier ordre. On prends la solution sans second membre

$$V_{s1}(t) = V_0 \exp(-\omega_0 t) \quad (32)$$

et la solution particulière

$$V_{s2} = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} V_e \quad (33)$$

Et ainsi

$$V_s(t) = V_0 \exp(-\omega_0 t) + \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} V_e \quad (34)$$

Le montage est **stable** (la tension en sortie ne diverge pas), l'ALI est donc bien en régime linéaire a priori. Pour  $t \gg \omega_0$  on a

$$V_s \simeq \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} V_e = \frac{1}{\frac{1}{\mu_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} V_e \simeq \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_e. \quad (35)$$

On retrouve bien le résultat vu dans le cadre de l'hypothèse de gain infini.

## 2.2.3 Fonction de transfert

Intéressons nous maintenant au cas où l'entrée est sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , et calculons la fonction de transfert  $H(\omega)$ .

$$V_s + j\omega\tau V_s = \mu_0 \left( V_e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \right) \quad (36)$$

$$V_s \left( 1 + j\omega\tau + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) = \mu_0 V_e \quad (37)$$

Ainsi

$$H(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \quad (38)$$

Faisons apparaître la quantité

$$H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \quad (39)$$

dans l'expression de notre fonction de transfert.

$$H(\omega) = \left( \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \right) \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}}} \quad (40)$$

on identifie

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad (41)$$

Et ainsi

$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \quad (42)$$

Le gain maximal du montage est  $H_0$ . On a vu précédemment que

$$|H_0| \sim \frac{R_1 + R_2}{R_1} \sim 100. \quad (43)$$

Un ALI seul amplifie d'un facteur  $\mu_0 \sim 1 \times 10^5$ . Pourquoi a-t-on fait ce montage pour amplifier moins qu'un ALI seul ?

On l'a vu, le défaut de l'ALI seul est sa très faible bande passante : en effet sa fréquence de coupure est  $1/\tau \sim 100$  Hz. Ici, le montage est passe bas de pulsation de coupure  $\omega_0$ , ainsi la bande passante est  $\omega_0$ . On a

$$\omega_0 \gg \frac{1}{\tau} \quad \text{car} \quad \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \gg 1. \quad (44)$$

Ce montage amplifie bien moins qu'un ALI seul **mais sur une gamme de fréquence bien plus importante**. On a perdu en gain pour gagner en bande passante. En réalité, il y a même **conservation du produit gain bande-passante** car pour l'ALI ce produit vaut

$$P_{GB} = \mu_0 \times \frac{1}{\tau} \quad (45)$$

Et pour l'amplificateur non inverseur

$$P_{GB} = H_0 \omega_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{\mu_0}{\tau}. \quad (46)$$

## 2.2.4 Rétroaction sur l'entrée non inverseuse

Regardons le comportement temporel de notre montage si on fait la rétroaction sur le + au lieu du -. On veut voir si le montage est toujours stable pour une tension d'entrée constante.

$$V_s + \tau \frac{dV_s}{dt} = \mu_0 \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s - V_e \right) \quad (47)$$

Ainsi

$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{V_s}{\tau} \left( 1 - \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right) = \frac{\mu_0}{\tau} V_e \quad (48)$$

On note

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right) > 0 \quad (49)$$

La solution sans second membre est

$$V_{s1}(t) = V_0 \exp(\omega_1 t) \quad (50)$$

Cette solution diverge ! Le montage n'est plus stable et l'ALI sera donc **en régime saturé**.

Dans l'immense majorité des montages avec ALI, une rétroaction sur l'entrée inverseuse stabilise le montage, une rétroaction sur l'entrée non inverseuse le déstabilise.

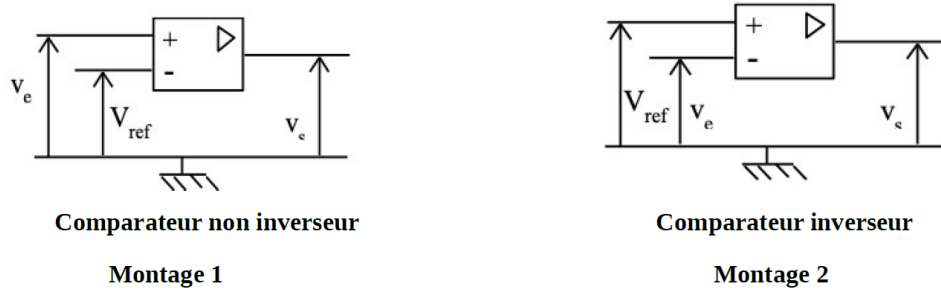


FIGURE 7 – Montages de comparateur simple

## 2.3 Comparateur simple

Ce montage réalise une comparaison entre la tension d'entrée  $V_e$  et une tension constante  $V_{ref}$  appliquée à l'autre entrée de l'ALI. Les montages sont sur la figure 7.

On se place toujours dans le cadre du modèle de l'ALI idéal et on suppose dans un premier temps que  $V_e$  est constant, pour le comparateur non inverseur. Est-on en régime linéaire ou saturé? On a

$$\varepsilon = V^+ - V^- = V_e - V_{ref} = \text{cste} \quad (51)$$

Si on est en régime linéaire on a

$$V_s + \tau \frac{dV_s}{dt} = \mu_0 \varepsilon \quad (52)$$

En résolvant l'équation différentielle on trouve

$$V_s = V_0 \exp(-t/\tau) + \mu_0 \varepsilon \simeq \mu_0 \varepsilon \quad (53)$$

au bout de quelques dizaines de ms. On sait que l'on est en régime linéaire tant que  $V_s < V_{sat} \sim 15 \text{ V}$ . La condition est donc

$$\mu_0 \varepsilon < V_{sat} = 15 \text{ V} \quad (54)$$

Or  $\mu_0 \sim 1 \times 10^5$  donc

$$\varepsilon < \frac{V_{sat}}{\mu_0} \sim 1,5 \times 10^{-4} \text{ V} = 0,15 \text{ mV}. \quad (55)$$

Dans la grande majorité des cas cette condition ne sera pas respectée : **on est donc en régime saturé**. C'est exactement la même chose pour le comparateur inverseur.

Ainsi  $V_s = \pm V_{sat}$ .

- Comparateur non inverseur :
  - Si  $V_s = +V_{sat} \implies \varepsilon > 0 \implies V_e > V_{ref}$
  - Si  $V_s = -V_{sat} \implies \varepsilon < 0 \implies V_e < V_{ref}$
- Comparateur inverseur :
  - Si  $V_s = +V_{sat} \implies \varepsilon > 0 \implies V_e < V_{ref}$
  - Si  $V_s = -V_{sat} \implies \varepsilon < 0 \implies V_e > V_{ref}$

On trace les caractéristiques  $V_s(V_e)$  avec par exemple  $V_e$  entre -10 et 10 V et  $V_{ref} = 3 \text{ V}$ .

On trace de même  $V_e$  et  $V_s$  en fonction du temps en régime sinusoïdal.

### Remarques :

- On a un signal *logique* en sortie car il ne peut prendre que deux valeurs (comme 0 et 1).
- Ce montage peut être utilisé pour la détection du passage à une tension de référence, ou pour transformer un signal analogique variable en signal numérique à deux valeurs.
- Ce montage a de très mauvaises caractéristiques en haute fréquence car l'ALI est passe-bas, on ne l'utilise qu'en basse fréquence.

## 2.4 Comparateur à hystérésis

Le montage du comparateur à hystérésis est représenté sur la figure 8. Il ressemble à celui de l'amplificateur non inverseur mais on voit ici que la rétroaction l'entrée non inverseuse : le système est donc instable et **en régime saturé**.

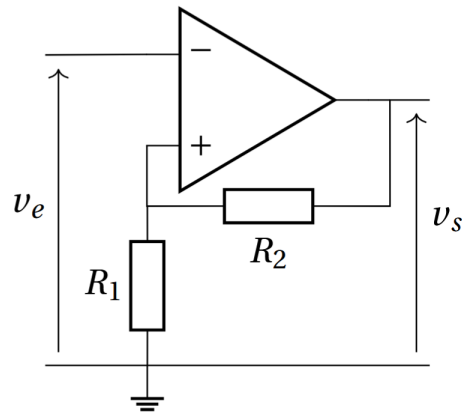


FIGURE 8 – Montage du comparateur inverseur à hystérésis

On se place dans l'hypothèse de l'ALI idéal, ainsi

$$i^+ = i^- = 0 \quad (56)$$

et l'ALI fonctionne en saturation. On cherche à exprimer  $\varepsilon$  pour connaître son signe.

$$\varepsilon = V^+ - V^- \quad (57)$$

On a  $V^- = V_e$  et on trouve  $V^+$  grâce à un diviseur de tension, car  $i^+ = 0$

$$V^+ = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (58)$$

Ainsi

$$\varepsilon = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_e \quad (59)$$

Finalement

- $V_s = +V_{\text{sat}}$  si  $\varepsilon > 0$  donc

$$V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_e > 0 \implies V_e < V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (60)$$

- $V_s = -V_{\text{sat}}$  si  $\varepsilon < 0$  donc

$$-V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_e < 0 \implies V_e > -V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (61)$$

Il faut remarquer que ces deux conditions ne s'excluent pas! (faire un axe de  $V_e$  pour le comprendre). Ainsi pour

$$-V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} < V_e < V_{\text{sat}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (62)$$

les deux conditions sont remplies, on ne peut a priori pas savoir dans quel état est le système. Il y a un **effet de mémoire** qu'on appelle *hystérésis*, dans cette zone là le système est dans le dernier état dans lequel il était, voir figure 9.

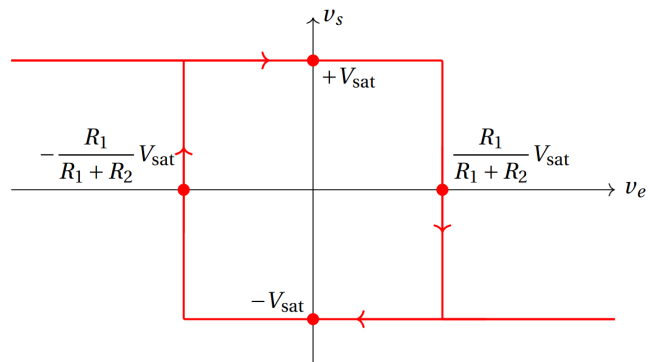


FIGURE 9 – Cycle d'hystérésis pour le comparateur à hystérésis.