

Électromagnétisme Partie I : Électrostatique et Magnétostatique

Chapitre 2 : Opérateurs d'analyse vectorielle

31 mars 2026

Pour pouvoir étudier les équations fondamentales de l'électromagnétisme nous devons apprendre à maîtriser quelques opérateurs d'analyse vectorielle.

1 Gradient

On a déjà vu le gradient en diffusion thermique (ou son utilisation était HP), nous allons le revoir ici. Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ **scalaire** et qui renvoie un champ **vectoriel**. En coordonnées cartésiennes, l'expression (à connaître) du gradient est

$$\vec{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (1)$$

Pour illustration on représente le gradient de champs scalaires sur la figure 1.

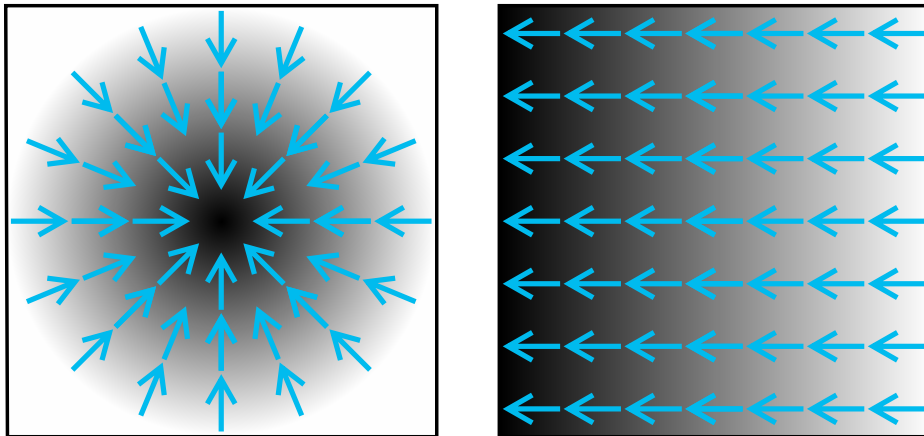


FIGURE 1 – Deux exemples de champ scalaires, les valeurs importantes étant représentées par une couleur plus sombre. Le gradient est dans chaque cas représenté par les flèches bleues, est orienté dans le sens de variation du champ, des valeurs faibles vers les grandes.

Propriétés :

- Il s'applique à un champ scalaire et renvoie un champ vectoriel.
- Il est orthogonal aux isovaleurs.
- Il est orienté des valeurs faibles vers les valeurs hautes ("gradient grandit").

En coordonnées cylindriques ou sphériques, l'expression du gradient vous sera fournie et vous devez savoir l'utiliser.

Exemple : Soit un champ scalaire V s'exprimant en coordonnées cylindriques

$$V(r) = \frac{a}{r} \quad (2)$$

On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (3)$$

et on cherche à calculer $\overrightarrow{\text{grad}} V$. On a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r = -\frac{a}{r^2} \quad (4)$$

Propriété : Soit \vec{dl} un segment infinitésimal, on a pour tout champ scalaire f

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{dl} = df \quad (5)$$

2 Divergence

Nous allons maintenant introduire l'opérateur *divergence*, noté $\text{div } \vec{f}$. Cet opérateur prend en entrée un **champ vectoriel** et donne en sortie un **champ scalaire**. Plaçons nous en coordonnées cartésiennes et notons $\vec{f} = f_x \vec{u}_x + f_y \vec{u}_y + f_z \vec{u}_z$. L'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes (à connaître) est alors

$$\text{div } \vec{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (6)$$

En coordonnées cylindriques ou sphériques l'expression vous sera fournie.

Sens physique : La divergence d'un champ vectoriel représente à quel point un champ "sort" ou "rentre" d'une zone de l'espace. En électromagnétisme on peut relier cette notion aux **sources** de champ électrique : en effet si on revient aux lignes de champ créées par des charges ponctuelles on voit que proche des charges le champ électrique est divergent (ou convergent).

Exemples : Pour différents champ vectoriels, calculons leur divergence.

- Soit le champ vectoriel $\vec{E} = -E_0 \vec{u}_x$ (panneau de droite de la figure 1).

$$\text{div } \vec{E}(x) = -\frac{\partial E_0}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Le champ est à divergence nulle.

- Soit $\vec{E} = -E_0 \vec{u}_r$, un champ électrique en coordonnées cylindriques (panneau de gauche figure 1). L'expression de la divergence en coordonnées cylindriques est

$$\text{div } \vec{f}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (8)$$

On a alors

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} - \frac{\partial r E_0}{\partial r} = -\frac{E_0}{r} \quad (9)$$

Le champ est bien à divergence non nulle.

3 Rotationnel

On va maintenant introduire l'opérateur *rotationnel*, noté $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f}$. Cet opérateur prend en entrée un champ **vectoriel** et donne en sortie un champ *vectoriel*. L'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes (à connaître) est

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \quad (10)$$

Cette expression ressemble beaucoup à un produit vectoriel comme on va le voir juste après.

Sens physique : Le rotationnel d'un champ de vecteur correspond à la tendance de ce champ à tourner autour d'un point.

Exemple : Soit le champ vectoriel défini par

$$\vec{E}(x, y) = -ay\vec{u}_x + ax\vec{u}_y \quad (11)$$

Représentons ce champ au tableau puis calculons son rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \left(0 - \frac{\partial(ax)}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(-\frac{\partial(ay)}{\partial z} - 0\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial(ax)}{\partial x} - \frac{\partial(-ay)}{\partial y}\right)\vec{u}_z = 2a\vec{u}_z \quad (12)$$

Le rotationnel est orthogonal au plan de rotation, comme le vecteur de rotation d'un solide.

4 Lien avec l'opérateur $\vec{\nabla}$

En coordonnées cartésiennes on peut définir l'opérateur $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z \quad (13)$$

On peut alors écrire le gradient d'un champ scalaire $f(x, y, z)$ comme

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla}(f) \quad (14)$$

On peut écrire la divergence d'un champ vectoriel $\vec{f}(x, y, z)$ comme

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \quad (15)$$

On peut écrire le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{f}(x, y, z)$ comme

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \quad (16)$$

c'est d'ailleurs le meilleur moyen de se souvenir de l'expression du rotationnel (à condition de savoir faire des produits vectoriels!).

5 Lien entre les opérateurs, et opérateur laplacien

Propriété : Pour tout champ scalaire A et champ vectoriel \vec{B} on a

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} A) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} A) = \vec{0} \quad (17)$$

Moyen mémotechnique : drg

Remarques :

- Les opérateurs gradient, divergence et rotationnel sont des opérateurs du premier ordre dans le sens qu'ils ne font apparaître que les dérivées premières du champ.
- La dimension de $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est égale à la dimension de f divisée par des mètres, de même pour la divergence ou le rotationnel.

On définit l'opérateur *laplacien*, noté Δf . Cet opérateur prend en entrée un **champ scalaire** et renvoie en sortie un **champ scalaire**. Il est défini par la relation

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}f) \quad (18)$$

En coordonnées cartésiennes, l'expression à connaître du laplacien est

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (19)$$

Le laplacien scalaire est une sorte de généralisation 3D de la dérivée seconde.

Pour finir, on définit également l'opérateur *laplacien vectoriel* noté $\vec{\Delta}\vec{f}$. Cet opérateur prend en entrée un **champ vectoriel** et renvoie en sortie un **champ vectoriel**. En coordonnées cartésiennes le laplacien vectoriel peut s'écrire comme

$$\vec{\Delta}\vec{f}(x, y, z) = \Delta f_x \vec{u}_x + \Delta f_y \vec{u}_y + \Delta f_z \vec{u}_z \quad (20)$$

$$\vec{\Delta}\vec{f} = \left(\frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial^2 f_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z \quad (21)$$

On peut exprimer le laplacien vectoriel en fonction d'autres opérateurs avec la formule (pas à connaître, qui vous sera rappelée)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{f}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f})) - \vec{\Delta}\vec{f} \quad (22)$$

6 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sont représentées sur la figure 2. En coordonnées sphériques un champ vectoriel

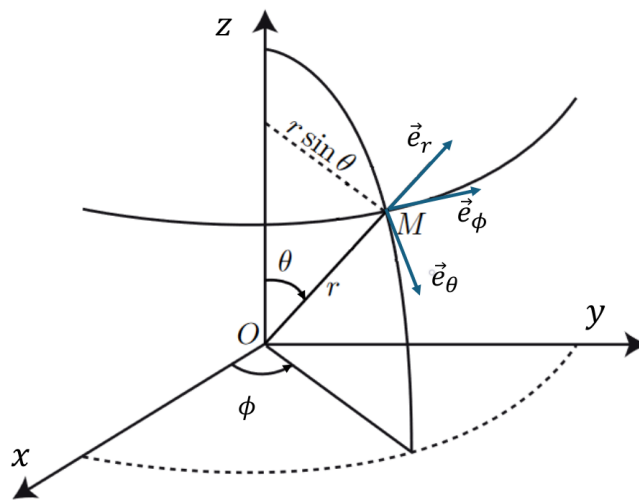


FIGURE 2 – Coordonnées sphériques

(par exemple le champ électrostatique \vec{E}) a pour expression générale

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi \quad (23)$$