

# Électromagnétisme Partie I : Électrostatique et Magnétostatique

## Chapitre 3 : Champ et potentiel électrostatiques

31 mars 2026

Dans ce chapitre nous allons introduire les lois fondamentales de l'électrostatique et les utiliser afin de calculer le champ électrique créé par des distributions continues de charge.

### 1 Symétries et invariances

À priori (en coordonnées cartésiennes) on a  $\vec{E} = E_x(x, y, z)\vec{u}_x + E_y(x, y, z)\vec{u}_y + E_z(x, y, z)\vec{u}_z$ . Le but de cette partie est de simplifier, à partir des symétries et invariances de la **distribution de charges** l'expression du champ électrique  $\vec{E}$ .

**Principe de Curie :** Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets.

#### 1.1 Invariances

Une distribution de charge est invariante par une transformation si les configurations avant et après transformation sont indiscernables. Les invariances de la distribution de charge permettent de déduire les dépendances du champ électrique.

**Exemple :**

- En coordonnées cylindriques, on a à priori  $\vec{E}(r, \theta, z)$ . On considère un fil infini selon l'axe  $Oz$  de charge linéique  $\lambda$  uniforme. Le système est ainsi invariant par translation selon l'axe ( $Oz$ ). De plus, le système est invariant par rotation d'angle  $\theta$ . On a ainsi  $\vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$ .
- En coordonnées cartésiennes, on considère un plan infini ( $Oxy$ ), de charge surfacique  $\sigma$  uniforme. Le système est ainsi invariant par translations selon l'axe  $x$  et l'axe  $y$ . On a ainsi  $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$ .

#### 1.2 Symétries

L'étude des symétries de la distribution de charges va permettre de déduire l'orientation du champ électrique  $\vec{E}$ .

**Plan de symétrie :** Un plan ( $\Pi_S$ ) est un plan de symétrie de la distribution de charges (panneau de gauche figure 1) si

- il est un plan de symétrie des points
- les charges sont de même signe symétriquement par rapport au plan  $q(P') = q(P)$

**Plan d'antisymétrie :** Un plan ( $\Pi_A$ ) est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges (panneau de droite figure 1) si

- il est un plan de symétrie des points
- les charges sont de signes opposés symétriquement par rapport au plan  $q(P') = -q(P)$

**Propriétés :**

- Le champ électrique créé en un point  $M$  d'un plan de symétrie ( $\Pi_S$ ) d'une distribution de charge est contenu dans ce plan.

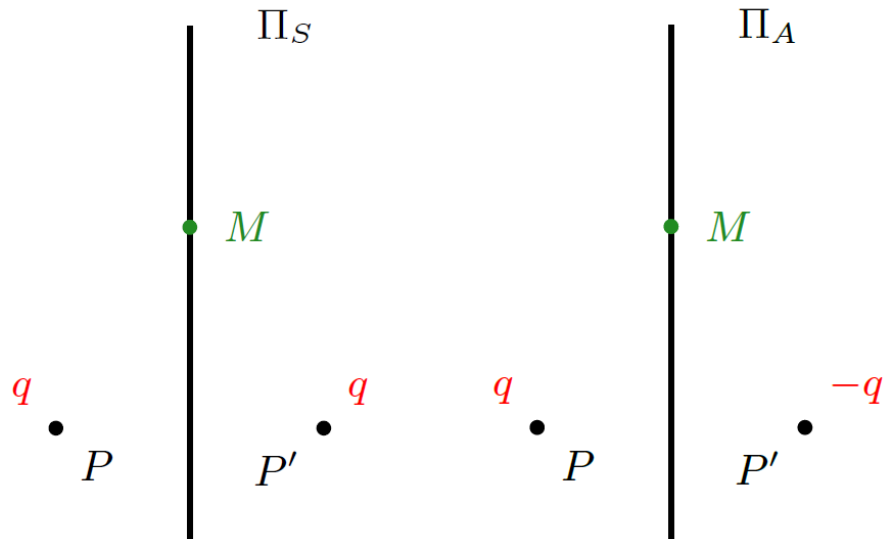


FIGURE 1 – Plans de symétrie et d’antisymétrie d’une distribution de charge.

- Le champ électrique créé en un point  $M$  d’un plan d’antisymétrie ( $\Pi_A$ ) d’une distribution de charge est orthogonal à ce plan.

Pour déterminer l’orientation du champ électrique on a ainsi besoin de deux plans de symétrie ou d’un plan d’antisymétrie.

**Exemples :**

- On revient sur notre fil infini selon l’axe ( $Oz$ ), de charge linéique  $\lambda$  uniforme. On se place en coordonnées cylindriques donc à priori  $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_z \vec{u}_z$ . Soit  $M$  un point de l’espace (hors du fil). Le plan passant par l’axe ( $Oz$ ) et le point  $M$  est un plan de symétrie de la distribution de charge. Ainsi  $\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_z \vec{u}_z$ . De plus le plan orthogonal au fil passant par  $M$  est également un plan de symétrie des charges. Finalement

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r = E_r(r) \vec{u}_r \quad (1)$$

grâce à l’étude des invariances faite précédemment.

- Revenons sur le plan infini ( $Oxy$ ), de charge surfacique  $\sigma$  uniforme. Soit un point  $M$  en dehors de la distribution de charges. Tous les plans orthogonaux au plan ( $Oxy$ ) et contenant le point  $M$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrique  $\vec{E}$  est donc contenu dans l’intersection de tous ces plans ainsi

$$\vec{E} = E_z \vec{u}_z = E_z(z) \vec{u}_z \quad (2)$$

grâce à l’étude des invariances faite précédemment.

## 2 Équations de Maxwell en électrostatique

Les quatre équations de Maxwell sont les équations fondamentales de l’électromagnétisme. Nous allons voir deux d’entre elles dans l’approximation de l’électrostatique.

### 2.1 Énoncé des équations

En notant  $\rho$  la densité volumique de charge, l’équation de Maxwell-Gauss est

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Cette équation est celle qui décrit la génération du champ  $\vec{E}$  par les charges.

Dans l’approximation de l’électrostatique, l’équation de Maxwell-Faraday est

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad (4)$$

## 2.2 Notion de potentiel électrostatique

L'équation de Maxwell-Faraday nous dit que  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ . Nous avons vu précédemment que pour tout champ scalaire  $\vec{A}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{grad}}A = 0$ . On introduit ainsi le potentiel électrostatique  $V$  tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (5)$$

$V$  s'exprime en V et on retrouve bien le fait que  $\vec{E}$  s'exprime en V/m.

### Conséquences :

- Le champ électrostatique est orienté vers les potentiels décroissants. Ainsi une ligne de champ électrique n'est pas fermée sur elle même.
- Les lignes de champ  $\vec{E}$  sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.
- On définit la tension  $U$  entre deux points  $A$  et  $B$  comme

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (6)$$

En utilisant l'expression du potentiel électrostatique

$$U_{AB} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = - \int_A^B dV = -(V_B - V_A) \quad (7)$$

Finalement

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (8)$$

Ce potentiel électrostatique correspond bien à la notion vue en électricité, une différence de potentiel est une tension.

- Une charge  $q$  plongée dans le potentiel  $V$  a une énergie potentielle

$$E_p = qV \quad (9)$$

En effet cette particule subit la force  $\vec{F} = q\vec{E} = -q\overrightarrow{\text{grad}}V$ . Le travail élémentaire de cette force lors du déplacement infinitésimal  $d\vec{l}$  est

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -qdV = -d(qV) \quad (10)$$

L'énergie potentielle étant définie comme

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p \quad (11)$$

on a bien

$$E_p = qV \quad (12)$$

- Soit  $d\vec{l}$  un segment infinitésimal

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = -dV \quad (13)$$

Ainsi, on peut estimer la valeur du champ électrique à partir d'une carte d'équipotentielles : pour deux équipotentielles dont les valeurs diffèrent de  $\delta V$ , écartées de  $\delta l$  on a

$$E\delta l \simeq \delta V \quad (14)$$

Sur la figure 2 on a représenté des équipotentielles, deux équipotentielles voisines différant de 5 V. Le potentiel est haut près des charges positives et faible près de la charge négative. Le champ électrique va bien des hauts potentiels vers les faibles, et est bien orthogonal en tout point aux équipotentielles.

Vu qu'on a  $E\delta l \simeq \delta V$ , des équipotentielles resserrées indiquent un champ électrique intense.

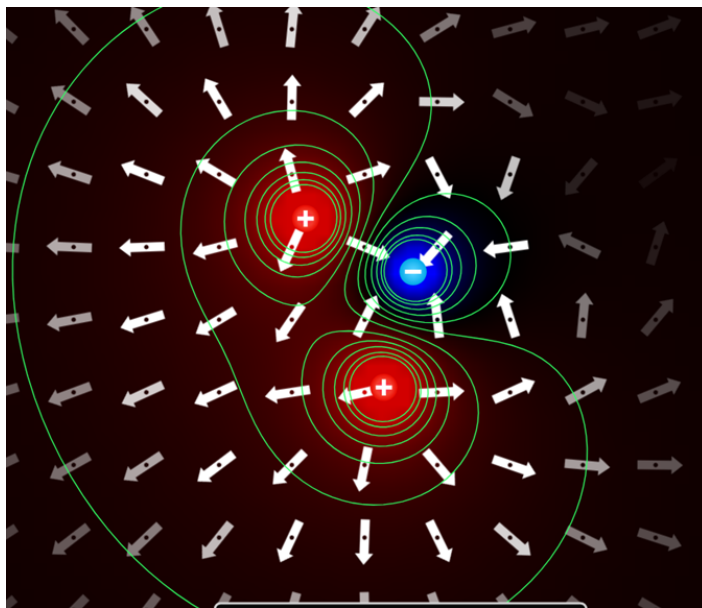


FIGURE 2 – Équipotentiels (en bleu) et lignes de champ électrostatique pour une distribution de charges ponctuelles.

## 2.3 Démonstration du théorème de Gauss

Considérons un certain volume  $\mathcal{V}$  de l'espace, entouré par la surface fermée  $S$ . On note la densité volumique de charge  $\rho$ . L'équation de Maxwell-Gauss est

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (15)$$

De plus, le théorème de Green-Ostrogradski (pas à connaître, mais à savoir utiliser) nous dit que, pour toute surface fermée  $S$  entourant un volume  $\mathcal{V}$  et pour tout champ de vecteur  $\vec{A}$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau \quad (16)$$

Si on applique ce théorème à notre situation, et qu'on utilise l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau \quad (17)$$

En notant  $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau$  la charge totale contenue dans le volume  $\mathcal{V}$ , on aboutit au théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (18)$$

Ainsi, si on sait calculer la charge contenue dans un certain volume de l'espace et le *flux* du champ électrique à travers la surface entourant ce volume, on peut calculer le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par cette distribution de charges.

**Remarque importante :** Lorsque l'on a une surface fermée  $S$ , la convention veut qu'en tout point celle-ci soit orientée en *normale sortante*. Exemple avec une sphère et un parallélépipède.

## 3 Applications classiques du théorème de Gauss

### 3.1 Méthode générale

Pour réussir à calculer le champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss, on suit les étapes suivantes

- On schématise la distribution de charge et on choisit le système de coordonnées en conséquence.
- On analyse les symétries et les invariances pour simplifier l'expression de  $\vec{E}$ .

- On choisit la surface de Gauss adaptée : idéalement le champ électrostatique est constant sur cette surface.
- On calcule la circulation du champ électrostatique à travers cette surface, puis la charge qu'elle contient.
- On applique enfin le théorème de Gauss pour déduire l'expression de  $\vec{E}$ .

## 3.2 Fil infini

Revenons sur l'exemple du fil infini selon l'axe  $(Oz)$ , de charge linéique  $\lambda$  uniforme. On souhaite appliquer le théorème de Gauss afin de calculer le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par ce fil. On va tout d'abord utiliser les invariances et symétries du problème afin de simplifier l'expression de  $\vec{E}$ .

- On se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le problème étant invariant par translation selon l'axe  $(Oz)$  et par rotation d'angle  $\theta$ , le champ électrique ne dépend que de  $r$ .
- Soit un point  $M(r, \theta, z)$  hors du fil. Le plan orthogonal au fil passant par  $M$  et le plan contenant le fil et le point  $M$  sont tout deux des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrique au point  $M$  est donc contenu dans l'intersection de ces deux plans, on a donc

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r \quad (19)$$

- On choisit comme surface de Gauss un cylindre *fermé* de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  centré sur le fil. Le champ est bien constant sur la surface latérale mais pas sur les surfaces supérieure et inférieure.
- Calculons maintenant le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface  $S$  de ce cylindre. Nous allons distinguer la surface  $S_{\text{lat}}$  latérale du cylindre et les deux surfaces  $S_h$  et  $S_b$ , surfaces respectivement du haut et du bas du cylindre.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_b} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_h} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (20)$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} E(r)\vec{u}_r \cdot r d\theta dz \vec{u}_r + \iint_{S_b} E(r)\vec{u}_r \cdot r d\theta dr (-\vec{u}_z) + \iint_{S_h} E(r)\vec{u}_r \cdot r d\theta dr \vec{u}_z \quad (21)$$

Les deux derniers termes sont nuls car  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$ . On a ainsi

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} E(r) \cdot r d\theta dz = E(r)r \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h d\theta dz = E(r)2\pi r h \quad (22)$$

La charge contenue dans ce cylindre est :

$$Q_{\text{int}} = \lambda h \quad (23)$$

- D'après le théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (24)$$

Ainsi

$$E(r)2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad (25)$$

Enfinement, le champ électrostatique créé par un fil infini est

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r \quad (26)$$

On trouve un champ radial, qui décroît en  $1/r$  donc plus lentement que le champ créé par une charge ponctuelle qui lui décroît en  $1/r^2$ . C'est notamment du au caractère infini de la distribution de charge considérée.

### 3.3 Plan infini

Soit un plan infini ( $Oxy$ ) de charge surfacique  $\sigma$  uniforme.

- On se place en coordonnées cartésiennes et on cherche à calculer le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par cette distribution de charge.
- Le problème est invariant par translation selon les directions  $x$  et  $y$  ainsi  $\vec{E}$  ne dépend que de  $z$ . Soit un point  $M(x, y, z)$  hors du plan. Tous les plans orthogonaux au plan ( $Oxy$ ) et contenant  $M$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ  $\vec{E}$  est contenu dans l'intersection de ces plans ainsi  $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$ . Le principe de Curie nous assure également, vu la symétrie du problème, qu'on a  $E(z) = -E(-z)$ .
- On choisit comme surface de Gauss un parallélépipède de hauteur  $2h$  et de section  $S$ . On appelle  $S_{\text{lat}}$  sa surface latérale, orientée selon  $\vec{u}_x$  ou  $\vec{u}_y$ .
- Calculons le flux de  $\vec{E}$  à travers ce parallélépipède.

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} E(z)\vec{u}_z \cdot dydz\vec{u}_x + 0 + 0 + 0 + \oiint_S E(z)\vec{u}_z \cdot dx dy \vec{u}_z + \oiint_S E(-z)\vec{u}_z \cdot dx dy (-\vec{u}_z) \quad (27)$$

Les 0 correspondent aux autres intégrales sur les autres surfaces latérales, qui sont toutes orientées selon  $\vec{u}_x$  ou  $\vec{u}_y$ , le produit scalaire avec  $\vec{u}_z$  rendant donc toutes ces intégrales nulles. Or on a vu qu'on avait  $E(z) = -E(-z)$  donc

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E(z)S \quad (28)$$

Calculons la charge comprise dans cette surface :

$$Q_{\text{int}} = \sigma S \quad (29)$$

- Appliquons le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \implies 2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad (30)$$

On trouve finalement le champ électrostatique créé par un plan chargé infini

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad (31)$$

On remarque cette fois-ci que le champ est homogène et ne décroît pas lorsque l'on s'éloigne de notre distribution de charge, c'est encore une fois dû au caractère infini de cette distribution.

### 3.4 Sphère (boule) chargée en volume

On considère une sphère de rayon  $R$  de charge volumique  $\rho$  uniforme.

- On se place en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .
  - Invariances : Le problème est invariant par rotations d'angle  $\theta$  ou  $\varphi$  ainsi  $\vec{E}$  ne dépend que de  $r$ .
  - Symétries : Soit un point  $M(r, \theta, \varphi)$ . Tous les plans contenant les points  $O$  et  $M$  sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Le champ électrique est contenu dans l'intersection de ces plans, ainsi  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ .
- On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$ . Le champ électrostatique est ainsi bien constant sur cette surface.
- Calculons le flux de  $\vec{E}$  à travers cette surface.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)\vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E(r) \quad (32)$$

Pour calculer la charge intérieure à cette surface on doit faire une distinction de cas

–  $r < R$  on a alors

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (33)$$

–  $r > R$  on a alors

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (34)$$

• On applique le théorème de Gauss

– Pour  $r < R$

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (35)$$

– Pour  $r > R$

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (36)$$

On obtient donc finalement l'expression du champ électrostatique créé par une sphère chargée en volume de rayon  $R$

• Pour  $r < R$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r \quad (37)$$

• Pour  $r > R$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2 \varepsilon_0} \vec{u}_r \quad (38)$$

**Remarque importante :** Dans le deuxième cas  $r > R$  si on note  $Q = 4/3\pi R^3 \rho$  la charge contenue dans la sphère on trouve

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (39)$$

ce qui est l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle  $Q$  placée à l'origine du repère! Une fois qu'on n'est plus "dans" la sphère, le champ qu'elle créé est le même que celui d'une charge ponctuelle.

Cela est vrai quelque soit la distribution de charge (à symétrie sphérique)  $\rho(r)$ .

## 4 Condensateur plan

Un condensateur plan est composé de deux plaques de charges opposées, distantes de  $e$  (figure 3). On va essayer de calculer le champ électrostatique  $\vec{E}$  présent entre les deux plaques, d'en déduire la tension  $U$  entre les plaques pour finalement calculer la capacité  $C$  du condensateur. Celle ci est défini par la relation

$$Q = CU \quad (40)$$

où  $U = V_2 - V_1$ ,  $V_1$  étant le potentiel au niveau de l'armature du haut chargée négativement et  $V_2$  le potentiel au niveau de l'armature du bas.

On va négliger les effets de bord et on considère ainsi que les deux plans sont infinis. On utilise le *théorème de superposition* pour calculer le champ électrostatique créé par ces deux plaques : il est la somme des champs créés séparément par chacune des plaques.

On a  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  avec  $\vec{E}_1$  le champ créé par la plaque du haut et  $\vec{E}_2$  le champ créé par la plaque du bas. On a donc

• Pour  $z > e$  :

$$\vec{E}_1 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad (41)$$

D'où

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}. \quad (42)$$

• Pour  $0 < z < e$  :

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad (43)$$

D'où

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad (44)$$

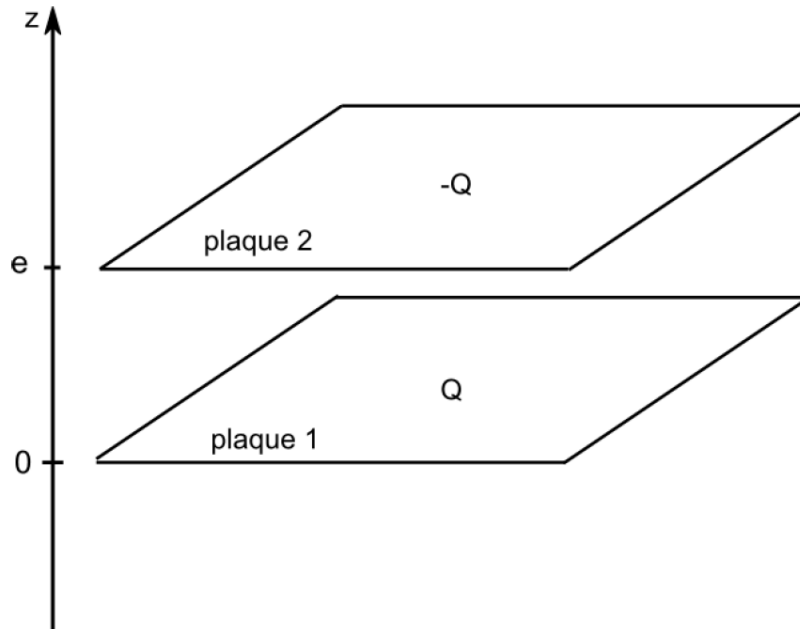


FIGURE 3 – Schéma d'un condensateur plan

- Pour  $z < 0$  :

$$\vec{E}_1 = -\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad ; \quad \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad (45)$$

D'où

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \quad (46)$$

En dehors du condensateur le champ est ainsi nul, et il est uniforme à l'intérieur.

La tension  $U$  est une différence de potentiel électrostatique  $V$  défini par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z \quad (47)$$

À l'intérieur du condensateur on a donc

$$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + A \quad (48)$$

On a donc

$$U = V_2 - V_1 = V(0) - V(e) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S} \quad (49)$$

Enfin la capacité du condensateur plan est

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \quad (50)$$